www.sapientia.uji.es | 10



Fundamentos matemáticos de la ingeniería

Pura Vindel

Fundamentos matemáticos de la ingeniería

Pura Vindel



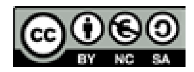
Departament de Matemàtiques

■ Codi assignatura 803

Edita: Publicacions de la Universitat Jaume I. Servei de Comunicació i Publicacions
Campus del Riu Sec. Edifici Rectorat i Serveis Centrals. 12071 Castelló de la Plana
http://www.tenda.uji.es e-mail: publicacions@uji.es

Col·lecció Sapientia, 10
www.sapientia.uji.es

ISBN: 978-84-692-3983-4



Índice general

I ÁLGEBRA LINEAL

TEMA 1

MATRICES Y DETERMINANTES

1.1. DEFINICIÓN DE MATRIZ

Una matriz es un rectángulo de números considerado como una entidad y delimitado por paréntesis o corchetes. Una **matriz** con m filas y n columnas se dice que es una matriz $m \times n$. Las matrices se suelen denotar por letras mayúsculas y los números que las componen, denominados **elementos**, por letras minúsculas con subíndices que indican el lugar que ocupan en la matriz.

$$A = (a_{ij}), \quad i: \text{índice de fila}, \quad j: \text{ índice de columna.}$$

Las matrices se usan en muchos contextos, en particular para organizar tableros de datos, para la resolución de ecuaciones lineales, etc.

Ejemplo 1.1 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ *es una matriz* 2×3, $a_{11} = 2$, $a_{12} = 1$, *etc.*

Ejemplo 1.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ *es una matriz fila;* $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *es una matriz columna.*

Ejercicio 1.1 *Construir la matriz* $A = (a_{ij})_{4\times 3}$ *donde* $a_{ij} = 2i - j$.

Ejercicio 1.2 *Organizar los siguientes datos en forma de matriz:*

Una tienda tiene dos almacenes como proveedores de electrodomésticos; el primer almacén tiene dos lavadoras, dos cocinas y tres neveras en existencia. El segundo tiene cuatro cocinas, tres lavadoras y una nevera.

¿Cuál será el máximo número de unidades que puede solicitar la tienda?

1.2. ÁLGEBRA DE MATRICES

Para muchas de las aplicaciones de las matrices es interesante conocer qué operaciones se pueden realizar con ellas, es decir, conocer el álgebra de las matrices.

Se dice que dos matrices son iguales si tienen el mismo tamaño y los elementos correspondientes son iguales.

1.2.1. Suma de matrices

Definición 1 *Se define la **suma** de dos matrices* A *y* B *que tienen el mismo tamaño como la matriz que resulta de sumar los elementos correspondientes de* A *y* B*. NO se pueden sumar matrices de tamaño distinto.*

Ejemplo 1.3 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definición 2 *Si A es una matriz y c un número, el producto cA es la matriz que se obtiene al multiplicar todos los elementos de A por c.*

Ejemplo 1.4 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$, $c = -2$, $\Rightarrow cA = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -6 & 14 \end{pmatrix}$

Definición 3 *Si A es una matriz $-A$ denota la matriz $(-1)A$. Si A y B son dos matrices del mismo tamaño $A - B$ se define como la suma $A + (-B)$.*

Ejemplo 1.5 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad A - B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Propiedades de la suma de matrices y multiplicación por un escalar

Suponiendo adecuado el tamaño de las matrices, se cumplen las siguientes propiedades:

1. **Asociativa:** $A + (B + C) = (A + B) + C$
2. **Conmutativa:** $A + B = B + A$
3. **Elemento neutro:** $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A$, donde $\mathbf{0}$ representa una matriz con todos sus elementos nulos.
4. **Elemento opuesto:** $A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{0}$
5. **Distributiva respecto de los escalares:** $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$
6. **Distributiva respecto de las matrices:** $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$

Por contra, la multiplicación de matrices sigue reglas más complejas.

1.2.2. Multiplicación de matrices

Definición 4 *Dadas las matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{n\times p}$ el producto AB define la matriz $C = (c_{ij})_{m\times p}$ cuyo elemento ij se obtiene al multiplicar la fila i de la matriz A por la columna j de B de la forma:*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$$

Ejemplo 1.6 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad AB = C = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

NO es posible realizar el producto BA.

Ejercicio 1.3 *Demostrar que si están definidos los productos AB y BA, entonces A es una matriz $(m \times n)$ y B es una matriz $(n \times m)$.*

Suponiendo adecuado el tamaño de las matrices, se cumplen las siguientes propiedades:

1. **Asociativa:** $A(BC) = (AB)C$
2. **Distributiva a la derecha:** $(A+B)C = AC + BC$
3. **Distributiva a la izquierda:** $C(A+B) = CA + CB$

NO se cumple la propiedad conmutativa, en general $AB \neq BA$.

Definición 5 *Se define la* transpuesta *de una matriz como aquella matriz que se obtiene cambiando filas por columnas* $A^T = A'$ *: matriz transpuesta de* A.

1.3. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA. PROPIEDADES

Una **matriz cuadrada** es aquella que tiene el mismo número de filas que de columnas. $A = (a_{ij})_{n\times n}$ se dice que es una matriz de orden n. Los elementos ij tales que $i = j$ determinan lo que se conoce como **diagonal principal.**

Se llama **matriz unidad, I**, a una matriz cuadrada cuyos elementos son 1 en la diagonal principal y 0 en el resto. Se conoce como **matriz diagonal** a una matriz cuadrada si todos sus elementos fuera de los de la diagonal principal son cero.

Definición 6 (Potencia de una matriz) *Si* A *es una matriz cuadrada la ley asociativa del producto permite escribir*

$$A^2 = AA, \quad A^3 = AAA, ..., \quad A^n = \overset{n \text{ veces}}{AA...A}$$

Ejercicio 1.4 *Dada* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *calcular* A^2 *y* A^3.

Ejercicio 1.5 *¿Cuál sería la potencia* $n-$*sima de una matriz unidad? ¿Y de una matriz diagonal?*

Una matriz cuadrada tiene asociado un escalar, su **determinante**. Los determinantes se definen en términos de permutaciones sobre enteros positivos. La teoría es compleja pero una vez completa da lugar a métodos más simples del cálculo de los determinantes. Nos limitaremos a estudiar estos métodos de cálculo. Los determinantes se definen **sólo** para matrices cuadradas.

Los determinantes de las matrices de orden 2 y 3 viene dados por las siguientes reglas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$

Para matrices de orden mayor desarrollaremos un método basado en menores y cofactores y reduciremos el determinante de la matriz a una suma de determinantes de orden dos o tres.

Definición 7 *Un* ***menor*** *de una matriz A es el determinante de cualquier submatriz cuadrada de A.*

Definición 8 *El* ***cofactor*** α_{ij} *del elemento* a_{ij} *de una matriz A es el escalar obtenido al multiplicar* $(-1)^{i+j}$ *por el menor obtenido de A quitando la fila i y la columna j. También se conoce como adjunto del elemento* a_{ij}*.*

1.3.1. Desarrollo de un determinante por los cofactores de una fila o columna

El determinante de A se calcula multiplicando los elementos de una fila (o una columna) por sus cofactores y sumando los productos resultantes, por ejemplo:

$$\begin{aligned}|A| &= a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + ... + a_{in}\alpha_{in} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}\alpha_{il} \\ |A| &= a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + ... + a_{nj}\alpha_{nj} = \sum_{l=1}^{n} a_{lj}\alpha_{lj}\end{aligned}$$

Se puede elegir cualquier fila (o columna) para este desarrollo, es interesante elegir aquella que tenga un mayor número de ceros.

Ejemplo 1.7 *Dada* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$*; calcular su determinante desarrollando en cofactores.*

Solución. Utilizando la primer fila para el desarrollo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -9$$

Si la matriz no tiene ceros es interesante utilizar las propiedades de los determinantes para conseguir el mayor número de ceros posible.

1.3.2. Propiedades de los determinantes

1. El determinante de una matriz diagonal es el producto de los elementos de su diagonal principal.

2. Si una matriz cuadrada tiene una fila o una columna de ceros su determinante es cero.

3. Si la matriz B se obtiene a partir de una matriz cuadrada A intercambiando la posición de dos filas (columnas) entonces

$$|B| = -|A|$$

Corolario 1 *Si dos filas de una matriz son idénticas su determinante es nulo.*

4. Si la matriz B se obtiene a partir de una matriz cuadrada A multiplicando todos los elementos de una fila (columna) de A por un escalar λ entonces

$$|B| = \lambda\,|A|$$

Corolario 2 *Si A es una matriz de orden n entonces* $|\lambda A| = \lambda^n\,|A|$.

5. Si la matriz B se obtiene a partir de una matriz cuadrada A sumando a una fila (columna) de A otra fila (columna) de A multiplicada por un escalar λ entonces

$$|B| = |A|$$

Las propiedades 3, 4 y 5 se conocen como operaciones elementales sobre filas (columnas) y resultan muy útiles para conseguir ceros en una fila (columna) de una matriz.

Se puede diseñar, pues, un algoritmo basado en estas operaciones que simplifique el cálculo de los determinantes. Trabajaremos con filas a menos que se indique lo contrario.

Ejemplo 1.8 *Dada* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, *calcular su determinante utilizando las propiedades anteriores.*

Solución. $|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \underset{F_2 \longleftrightarrow F_1}{=} - \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \underset{F_3 \to F_3 + \frac{1}{2} F_1}{=}$

$$= - \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{7}{2} & 7 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ \frac{7}{2} & 7 \end{vmatrix} = -56$$

Una matriz en la que todos sus elementos por debajo (arriba) de la diagonal principal son cero se conoce como un **matriz triangular superior (inferior)**. Es fácil demostrar que el determinante de dichas matrices es el producto de los elementos de su diagonal. Se pueden, pues, aplicar las operaciones elementales sobre filas para transformar el determinante de una matriz cuadrada A en el determinante de una matriz triangular.

Ejemplo 1.9 *Dada* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, *calcular su determinante reduciéndolo al de una matriz triangular.*

Solución. $|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \underset{F_2 \longleftrightarrow F_1}{=} - \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$

$$\underset{F_3 \to F_3 + \frac{1}{2} F_1}{=} - \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{7}{2} & 7 \end{vmatrix} \underset{F_3 \to F_3 + \frac{7}{2} F_2}{=} - \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 14 \end{vmatrix} = 56$$

Ejercicio 1.6 *Calcular el determinante de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -6 & -9 & 12 \end{pmatrix}$$

Teorema 1 *Si A es una matriz cuadrada $|A| = \left|A^T\right|$.*

Teorema 2 *Si A y B son matrices cuadradas entonces $|AB| = |A|\,|B|$.*

1.4. RANGO DE UNA MATRIZ

Una matriz A de orden $m \times n$ se puede considerar formada por n vectores columnas de tamaño m.

Se dice que una columna es *linealmente independiente* de las otras si no se puede obtener a partir de las otras columnas mediante sumas y multiplicaciones por escalares, es decir, si no es una *combinación lineal* de las otras columnas.

Se define el **rango** de una matriz como el número de columnas linealmente independientes que tiene.

Teorema 3 $rg(A) = rg(A^T)$.

Una manera eficaz de encontrar el rango de una matriz es aplicar las operaciones elementales sobre las filas para ver cuales son linealmente independientes.

Ejemplo 1.10 $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_2 \\ F_3 \to F_3 - F_2}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 + F_2}{=}$

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\,.$$

Ejercicio 1.7 *Calcular* $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

1.5. INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA. PROPIEDADES

Definición 9 *La* inversa *de una matriz cuadrada A es aquella matriz B tal que $AB = BA = I$. Se denota por $B = A^{-1}$.*

A^{-1} debe ser del mismo orden que A para que se puedan multiplicar.

Una matriz que tiene inversa se dice que es **invertible** o **regular**. Si no tiene inversa se dice que es **singular**.

Teorema 4 *Toda matriz regular tiene determinante no nulo.*

Cálculo de la inversa

Veremos un método que consiste en aplicar operaciones elementales sobre las filas hasta transformar la matriz A en la identidad. Estas operaciones elementales se hacen simultáneamente sobre la matriz identidad, de forma que el resultado final será la inversa. Lo veremos con un ejemplo.

Ejemplo 1.11 *Calcular la matriz inversa de* $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

Solución. $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 3F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \to \frac{1}{6}F_2}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 2 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 - 2F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -6 & \frac{-7}{3} & \frac{-1}{3} & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \to \frac{-1}{6}F_3}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-7}{18} & \frac{1}{18} & \frac{-1}{6} \end{array}\right) \underset{F_1 \to F_1 + 2F_2 + F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{-1}{18} & \frac{-5}{18} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & \frac{-1}{6} \end{array}\right)$$

luego $$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{18} & \frac{-5}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & \frac{-1}{6} \end{pmatrix}$$

Se comprueba que:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{18} & \frac{5}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & \frac{-1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades

1. La inversa de una matriz es única.

2. Si A es una matriz regular
   $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A, \quad \left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}, \quad (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(A)^{-1}$ siendo $\lambda \neq 0$.

3. Si A y B son matrices regulares del mismo orden se cumple
   $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

1.6. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: DISCUSIÓN Y RESOLUCIÓN

Un conjunto de n igualdades del tipo

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2m}x_m &= b_2 \\ & ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

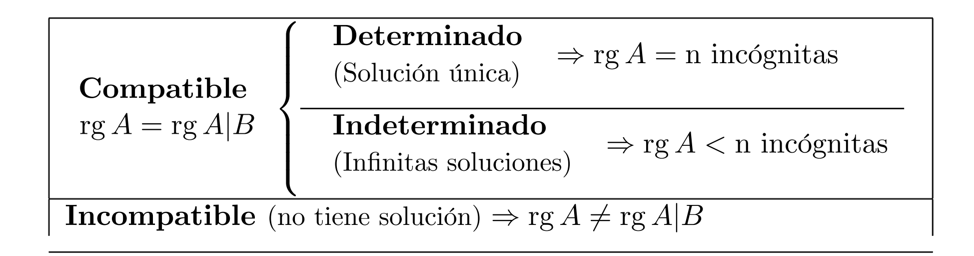
se llama sistema de n ecuaciones lineales con m incógnitas.

Una $m-$tupla $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ se dice que es una solución del sistema si al sustituir $x_1 \to \alpha_1$, $x_2 \to \alpha_2$, ..., $x_m \to \alpha_m$ se cumplen todas las ecuaciones del sistema.

El conjunto de todas las soluciones del sistema se llama *solución general*; una solución cualquiera se conoce como *solución particular*. Estos sistemas se pueden escribir matricialmente

$$AX = B.$$

Los sistemas se clasifican en función de las soluciones que tienen y se pueden estudiar en función del rango de las matrices A y la matriz ampliada $A|B$, que es la matriz A a la que se le ha añadido la columna de los términos independientes:



Si $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$ se dice que son *homogéneos*. Si algún $b_i \neq 0$ se conocen como sistemas *inhomogéneos*.

Dos sistemas de ecuaciones lineales se dice que son **equivalentes** si tienen la misma solución general.

1.6.1. Resolución por el método de Gauss

El **método reductivo o de Gauss** consiste en aplicar operaciones elementales sobre las ecuaciones para encontrar un sistema equivalente al dado de forma que la incógnita x_1 aparezca sólo en la primera ecuación, la x_2 en la segunda, etc. Es decir, se van eliminando incógnitas en las ecuaciones.

Realizar este tipo de operaciones sobre las ecuaciones es equivalente a considerar la matriz ampliada del sistema y realizar operaciones elementales sobre las filas.

Ejemplo 1.12 *Resolver*

Solución. $$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}\right| \text{se elimina } x_1 \left| \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ -2x_3 &= -6 \\ -3x_2 - x_3 &= -9 \end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ -3x_2 - x_3 &= -9 \\ -2x_3 &= -6 \end{aligned}\right| \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}\right|$$

Ejercicio 1.8 *Resolver*

$$\left.\begin{array}{r} -x_1+5x_2-4x_3=4 \\ 2x_1+2x_2-3x_3=2 \\ x_1+7x_2-7x_3=7 \end{array}\right|$$

Ejercicio 1.9 *Un platero dispone de tres aleaciones de plata, cobre y oro con la siguiente composición:*

	Ag	*Cu*	*Au*
1 aleación	*5 %*	*15 %*	*80 %*
2 aleación	*10 %*	*25 %*	*65 %*
3 aleación	*15 %*	*30 %*	*55 %*

¿Cuántos gramos ha de tomar de cada una para que al fundirlos se obtengan 15 gramos de una aleación que contenga el 12 % de plata, 26 % de cobre y 62 % de oro?

1.6.2. Aplicación de la matriz inversa a la resolución de sistemas de ecuaciones.

Un sistema de ecuaciones lineales puede escribirse de forma matricial como

$$AX=B$$

Si la matriz A es una matriz cuadrada regular, existe su inversa y por tanto se puede obtener el valor del vector columna X, que es el vector de las variables.

$$A^{-1}AX=A^{-1}B\Rightarrow X=A^{-1}B$$

lo que da lugar a la **regla de Cramer**.

Ejemplo 1.13 *Resolver el sistema*

$$\begin{array}{c} x_1+2x_2-x_3=-5 \\ 2x_1-x_2+x_3=6 \\ x_1-x_2-3x_3=-3 \end{array}$$

Solución. Este sistema se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix},$$

y calcular la inversa de la matriz A comprobando primero que es regular.

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}=19.$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\underset{\substack{F_2\to F_2-2F_1 \\ F_3\to F_3-F_1}}{\sim}\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\underset{F_2\to\frac{-1}{5}F_2}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 + 3F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-19}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-3}{5} & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \to \frac{-3}{19} F_3}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{-3}{5\cdot 19} & \frac{9}{5\cdot 19} & \frac{-3}{19} \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 + F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{19} & \frac{-2}{19} & \frac{-3}{19} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{-3}{5\cdot 19} & \frac{9}{5\cdot 19} & \frac{-3}{19} \end{array}\right) \underset{F_3 \to \frac{5}{3} F_3}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{19} & \frac{-2}{19} & \frac{-3}{19} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{19} & \frac{3}{19} & \frac{-5}{19} \end{array}\right) \underset{F_1 \to F_1 - 2F_2 + F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{19} & \frac{7}{19} & \frac{1}{19} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{19} & -\frac{2}{19} & -\frac{3}{19} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{19} & \frac{3}{19} & -\frac{5}{19} \end{array}\right).$$

Por tanto

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{19} & \frac{7}{19} & \frac{1}{19} \\ \frac{7}{19} & -\frac{2}{19} & -\frac{3}{19} \\ -\frac{1}{19} & \frac{3}{19} & -\frac{5}{19} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

TEMA 2

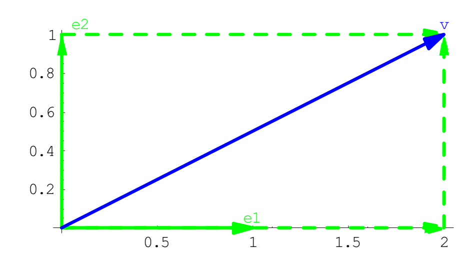
LOS ESPACIOS R ^{2} Y R^3

2.1. VECTORES EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO

Un conjunto ordenado de números se distingue no sólo por los elementos que contiene sino también por el orden en que están los elementos y se conoce como **vector**, o n**-tupla,** $\vec{v}=(v_1, v_2, v_3, ..., v_n)$. Los vectores coinciden con matrices fila $(1 \times n)$ o matrices columna $(n \times 1)$ y también son conocidos como *vector fila* y *vector columna.* Usaremos la notación de vector fila.

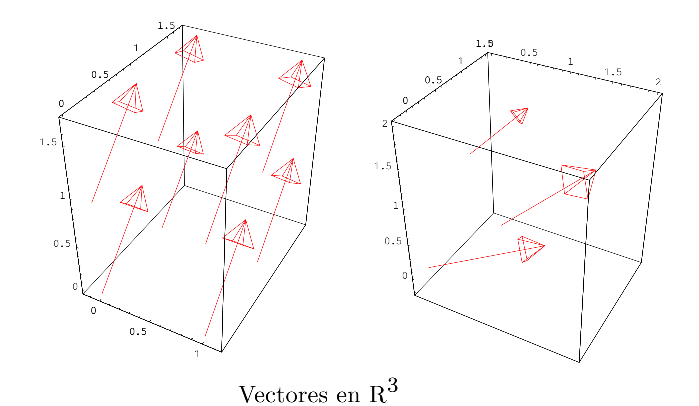
Los vectores se denotan en negrita o con flechas. Los números $(v_1, v_2, v_3, ..., v_n)$ se llaman **componentes** o **coordenadas** del vector. El número de componentes da la **dimensión** del vector. El conjunto de todos los vectores de la misma dimensión, n, se conoce como *espacio vectorial de dimensión.* Así, $\mathbf{R}^2$ es un espacio vectorial de dimensión 2 y $\mathbf{R}^3$ es un espacio vectorial de dimensión 3.

El término coordenadas proviene de la representación de los vectores respecto de los ejes coordenados. Así, los vectores de dimensión 2 se pueden representar en el plano. Su primera componente coincide con la proyección del vector sobre el eje X y se conoce también como coordenada x; su segunda componente o coordenada y coincide con la proyección del vector sobre el eje Y. Esto se lleva a cabo utilizando la misma unidad de longitud en ambos ejes y usando vectores de longitud unidad situados sobre los ejes, estos vectores básicos sirven para expresar los demás vectores del plano. El vector $\vec{i}=(1,0)$ es el vector unitario en la dirección del eje x y el vector $\vec{j}=(0,1)$ es el vector unitario en la dirección del eje y. Así, el vector $(3,4)=3\vec{i}+4\vec{j}$.



Componentes de un vector en el plano

También pueden dibujarse los vectores de tres componentes en el espacio tridimensional, cada una de las componentes corresponde a la proyección del vector sobre uno de los ejes coordenados. En este caso los vectores unitarios son: $\vec{i}=(1,0,0)$ el vector unitario en la dirección del eje x,el vector $\vec{j}=(0,1,0)$ el vector unitario en la dirección del eje y; y $\vec{k}=(0,0,1)$ el vector unitario en la dirección del eje z.



Vectores en R^3

Propiedad 1 *Dos vectores son iguales si, y sólo si, son iguales componente a componente*

Ejemplo 2.1 $(2,3) = (a,b) \Rightarrow a = 2, b = 3$.

Los vectores pueden sumarse algebraicamente sumando componente a componente (recordad que **son** matrices) y multiplicarse por un escalar multiplicando cada una de sus componentes por dicho escalar:

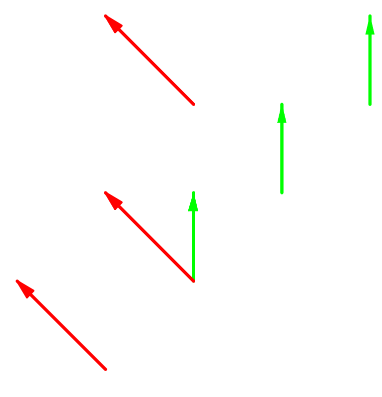
Ejemplo 2.2 $(3,4) + (1,-2) = (3+1, 4-2) = (4,2)$

$2\,(3,-3) = (2 \cdot 3, 2 \cdot (-3)) = (6,-6)$

2.1.1. Interpretación geométrica de los vectores

Muchas cantidades se caracterizan por un único número en una escala apropiada (por ejemplo, la temperatura, la masa, el tiempo, etc.), por lo que estas cantidades se llaman *magnitudes escalares*. Pero muchas otras magnitudes, como por ejemplo la fuerza y la velocidad, no se pueden caracterizar sólo por un número sino que necesitan también una dirección, es por esto que se introducen los vectores. Las magnitudes que se caracterizan por un número y una dirección se conocen como *magnitudes vectoriales*.

Es habitual representar un vector como una flecha que queda determinada por su dirección y longitud. Dos vectores se dice que son *iguales o equivalentes* si tienen la misma longitud y están sobre rectas paralelas con el mismo sentido.



Vectores equivalentes

Por tanto se suele tomar el origen de ordenadas como origen de vectores.

Ejercicio 2.1 *Representar el vector que une los puntos* $(2, 3)$ *y* $(-1, 1)$. *Un vector equivalente a él cuyo origen sea el punto* $(1, 1)$ *y un vector equivalente a ambos cuyo origen sea el origen de coordenadas.*

Corolario 3 *Dos vectores* $\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *tienen la misma dirección si* $\vec{v} = k\vec{w}$, *siendo* k *un número real. Decimos que estos vectores son* ***paralelos***.

Se define el **módulo** o **norma** de un vector como su longitud,
$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, ..., v_n) \Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2 + ... + (v_n)^2}$.

Ejemplo 2.3 $\vec{v} = (-3, -2) \Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.

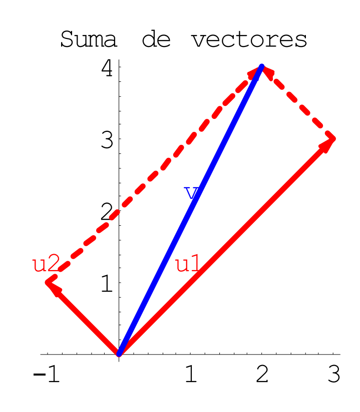
Un vector se dice que es **unitario** si su modulo es 1.

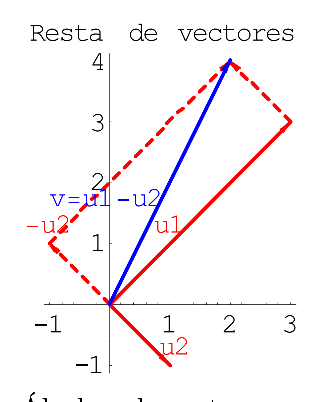
Ejemplo 2.4 $\vec{v} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) \Rightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1$

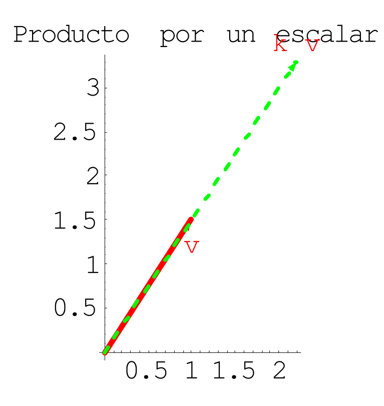
Propiedad 2 *Las propiedades de los modulos de los vectores se parecen mucho a las propiedades de los valores absolutos de los números reales:*

1. $\|\vec{v}\| \geq 0$
2. $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha| \, \|\vec{v}\|$
3. $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$

La suma, diferencia y multiplicación de un vector por un escalar siguen las reglas de las matrices. En el caso de vectores de dos dimensiones es fácil ver gráficamente el resultado de estas operaciones.







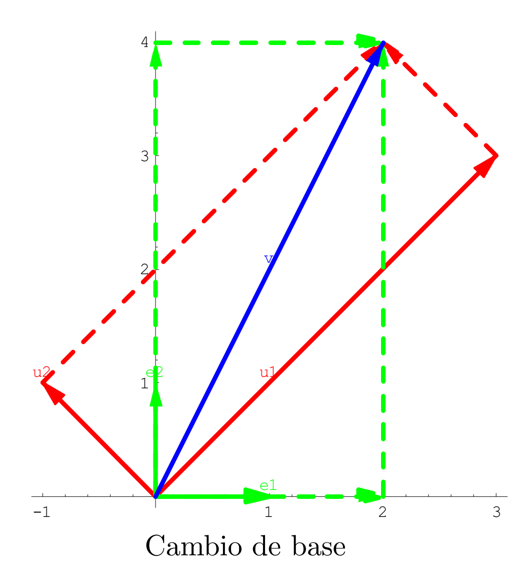
Álgebra de vectores

Ejercicio 2.2 *Dados los vectores* $\vec{a} = (2, 2)$ *y* $\vec{b} = (-1, 2)$. *Calcular y dibujar:* $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $-3\vec{a}$, $2\vec{b}$, $2\vec{a} - 4\vec{b}$.

Ejercicio 2.3 *Dados los vectores* $\vec{a} = (2, 1, 1)$ *y* $\vec{b} = (-1, 1, 2)$. *Calcular y dibujar:* $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a}$, $2\vec{b}$.

2.2. BASES CANÓNICAS. CAMBIO DE BASE

Tal y como se observa en el dibujo siguiente, un vector en el plano se puede escribir como la suma de dos vectores, pero estos vectores no son únicos, sino que el mismo vector se puede descomponer como suma de distintos pares de vectores



Cambio de base

Esto nos indica que todos los vectores del plano se pueden escribir como una *combinación lineal* de dos vectores que no sean paralelos, es decir, que sean *linealmente independientes.*[1] Estos dos vectores forman una **base** del plano.

Ejemplo 2.5 *Base de* $\mathbf{R}^2 = \langle (1,0), (0,1) \rangle$.
Base de $\mathbf{R}^3 = \langle (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \rangle$

En general las bases formadas por n-tuplas de la forma $(1,0,0,...,0)$, $(0,1,0,...,0)$, ..., $(0,0,0,...,0,1)$ se conocen como **bases canónicas.** Las bases del ejemplo anterior serían las bases canónicas del plano y del espacio. En la base canónica las componentes del vector son las dadas. Pero al cambiar de base, **cambian** también las componentes del vector.

De hecho, si $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, ..., \vec{v}_n\}$ es una base de un espacio vectorial V entonces cualquier vector de V será una combinación lineal de los vectores de esta base, es decir

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + ... + \alpha_n \vec{v}_n, \quad \forall \vec{v} \in V$$

Los escalares $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ son **únicos** para cada vector $\vec{v}$ y se conocen como las *coordenadas o componentes del vector en la base* B. Si se toma otra base B' de V, las coordenadas de los vectores **cambian**, serán los coeficientes de la combinación lineal de la nueva base.

Ejemplo 2.6 *Dado el vector* $\vec{v} = (7,3) \in \mathbf{R}^2$ *encontrar sus coordenadas en la base canónica y en las bases* $B = \{(1,1), (1,-1)\}$ *y* $B' = \{(2,1), (-1,-1)\}$.

Solución. En la base canónica las componentes del vector son las dadas. Las componentes en la base B son:

$$(7,3) = \alpha(1,1) + \beta(1,-1) \Rightarrow \begin{cases} 7 = \alpha + \beta \\ 3 = \alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

[1] Un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ se dice que son **linealmente independientes** si y sólo si $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + ... + \alpha_n \vec{v}_n = 0$ implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

$\Rightarrow (7,3) = (5,2)_B$.
y en la base B' :
$(7,3) = \alpha\,(2,1) + \beta\,(-1,-1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 7 = 2\alpha - \beta \\ 3 = \alpha - \beta \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{array} \right.$
$\Rightarrow (7,3) = (4,1)_{B'}$

Ejercicio 2.4 *Encontrar las coordenadas del vector* $\vec{v} = (2,-1,3) \in \mathbf{R}^3$ *en las bases*
$B = \{(1,0,0)\,, (2,2,0)\,, (3,3,3)\}$ *y* $B' = \{(1,0,0)\,, (1,1,0)\,, (1,1,1)\}$

2.3. PRODUCTO ESCALAR. MÓDULO DE UN VECTOR

Definición 10 *Se define el* ***producto escalar*** *de dos vectores de la misma dimensión* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ *y* $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$ *como el escalar que resulta de hacer las operaciones*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$$

Propiedades

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
3. $\vec{a} \cdot \left(\alpha\vec{b}\right) = (\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$, $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ sí y sólo sí $\vec{a} = 0$.

Ejercicio 2.5 *Pepe va a una frutería y compra 3 Kg de cerezas, 4 de peras, 3 de naranjas y 5 de manzanas. Luis compra 2 de cerezas, 2 de naranjas y 3 de manzanas. Se sabe que 1 Kg de cerezas vale 3.5 €, 1 de peras 1.6 €, 1 de naranjas 0.6 € y uno de manzanas 0.56 €.*

1. *¿Cúal es el vector de compras de Pepe? ¿Y el de Luis?*
2. *¿Cúal es el vector de precios?*
3. *¿Cuánto gasta cada uno de ellos?*
4. *Comprobar qué se satisfacen las propiedades anteriores.*

Teniendo en cuenta que al calcular el producto escalar de un vector consigo mismo se obtiene el cuadrado de su modulo, se observa que el producto escalar de dos vectores está relacionado con sus modulos y el ángulo que forman. De hecho, el ángulo que forman dos vectores puede calcularse como:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}$$

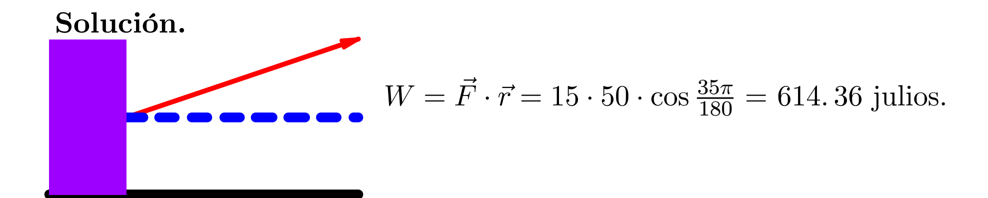
2.3.1. Trabajo realizado por una fuerza constante

El trabajo W realizado por una fuerza $\vec{F}$ constante, al mover un objeto a lo largo de una trayectoria rectilínea $\vec{r}$ se puede calcular como

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r}$$

Ejemplo 2.7 *Un objeto es arrastrado bajo el efecto de una fuerza de 15 newtons, ejercida por una cuerda que forma un ángulo de 35º con el suelo. Calcular el trabajo efectuado por esa fuerza al desplazar 50 metros el objeto.*

Solución.



Ejercicio 2.6 *Una caja de madera es arrastrada por el suelo mediante una cuerda que forma un ángulo de 40º con la horizontal. Si la fuerza de rozamiento, que actua en sentido opuesto al movimiento, entre la base de la caja y el suelo es de 50 N. ¿Cuál es la fuerza mínima necesaria para mover la caja?*

Ejercicio 2.7 *Dos fuerzas del mismo módulo, $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ se aplican durante un desplazamiento $\vec{r}$, con ángulos θ_1 y θ_2, respectivamente. Comparar el trabajo efectuado por ambas fuerzas si:*

1. $\theta_1 = -\theta_2$.
2. $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ y $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$.

2.3.2. Vectores ortogonales.

Dos vectores son **ortogonales** si su producto escalar es 0. En el plano y en el espacio de dimensión 3 es fácil comprobar que ésto significa que los vectores son perpendiculares entre sí.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Ejercicio 2.8 *Estudiar que pares de vectores son ortogonales:*

1. $\vec{a} = (1, 2)$ *y* $\vec{b} = (-2, -1)$.
2. $\vec{a} = (1, -1, 2)$ *y* $\vec{b} = (-2, 0, 1)$.

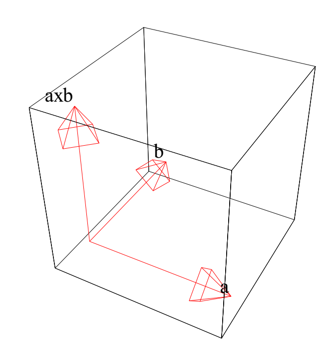
Ejercicio 2.9 *Calcular el valor de x para que los siguientes vectores sean ortogonales:*

$\vec{a} = (x, -x-2, x)$ *y* $\vec{b} = (x, 1, x)$.

2.4. PRODUCTO VECTORIAL

Mientras que lo visto hasta ahora sirve para vectores en espacios de cualquier dimensión, el producto vectorial de dos vectores **sólo** está definido para vectores de tres componentes.

Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no son paralelos, determinan un plano. El vector producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a este plano y su sentido es tal que los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} \times \vec{b}$ forman una terna orientada positivamente



y su modulo viene dado por

$$\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\| = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \sin\theta$$

siendo $0 < \theta < \pi$, el ángulo formado por los vectores $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$.

Una de las propiedades más interesantes del producto vectorial es que es **anticonmutativo**, es decir:

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$$

Para calcular sus componentes recurrimos a los determinantes

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

donde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ son los vectores unitarios en las direcciones de los ejes coordenados.

Ejemplo 2.8 *Calcular el producto vectorial de los vectores* $\vec{a} = (1,1,0)$ *y* $\vec{b} = (0,1,-1)$

Solución. $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i}+\vec{j}+\vec{k} = (-1,1,1)$

Ejercicio 2.10 *Hallar dos vectores unitarios que sean perpendiculares a los vectores* $\vec{a} = (1,3,-1)$ *y* $\vec{b} = (2,0,1)$.

Ejercicio 2.11 *Hallar un vector que sea perpendicular al plano determinado por los puntos* $P(1,2,3)$, $Q(-1,3,2)$ *y* $R(3,-1,2)$.

2.4.1. El producto mixto

La expresión $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ se conoce como producto mixto. Su valor absoluto (es un número) da el volumen del paralelepípedo de aristas $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ y se puede calcular fácilmente a partir del determinante

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 2.9 *Hallar el volumen del paralelepípedo generado por* $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ *y* $\overrightarrow{OR}$, *donde* $O(0,0,0)$, $P(1,2,3)$, $Q(2,1,1)$ *y* $R(1,1,2)$.

Solución. $\overrightarrow{OP} = (1,2,3)$, $\overrightarrow{OQ} = (2,1,1)$ y $\overrightarrow{OR} = (1,1,2)$, por lo que el volumen será el valor absoluto del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$, es decir, el volumen será 2 unidades de volumen.

Ejercicio 2.12 *Hallar el volumen del paralelepípedo generado por* $\overrightarrow{SP}$, $\overrightarrow{SQ}$ *y* $\overrightarrow{SR}$, *donde* $S(3,5,7)$, $P(1,2,3)$, $Q(2,1,1)$ *y* $R(1,1,2)$.

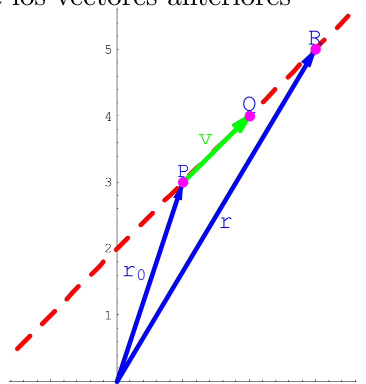
Los productos escalar y vectorial aparecen constantemente en la ingeniería y en la física. El trabajo es un producto escalar. También lo es la potencia desarrollada por una fuerza. El momento y el momento angular de una fuerza son productos vectoriales. Si se enciende el televisor y se observa el movimiento de los puntos en la pantalla, este movimiento está determinado por un producto vectorial. Cualquier manual de electromagnetismo está basado en las cuatro ecuaciones de Maxwell: dos de ellas son productos escalares y las otras dos productos vectoriales.

2.5. APLICACIONES

Los vectores que se usan para caracterizar la posición de un punto se llaman *vectores de posición.* Los vectores de posición que parten del origen se conocen como *radio-vectores.* Usaremos los radio vectores para caracterizar a las rectas

2.5.1. Rectas en el plano y en el espacio

Partimos de la idea de que dos puntos distintos P y Q, determinan una recta r. Empezaremos por estudiar las rectas en el plano. Para obtener una caracterización vectorial de la recta elegimos los vectores $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$. Cualquier otro punto R de la recta, de coordenadas arbitrarias (x,y), se puede escribir como una suma de los vectores anteriores



$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + t\vec{v}, \quad \text{donde } t \text{ es un número real.}$$

Esta *ecuación vectorial* parametriza a la recta al variar t. Podemos escribir estos vectores en coordenadas; si las coordenadas del punto P son $P(x_0, y_0)$, entonces $\overrightarrow{OP} = (x_0, y_0)$, el vector $\overrightarrow{OR}$ tiene componentes $\overrightarrow{OR} = (x,y)$ y las del vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Por tanto, la ecuación anterior se escribe

$$(x,y) = (x_0, y_0) + t(v_1, v_2)$$

Realizando las operaciones e igualando componentes se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tv_1 \\ y &= y_0 + tv_2 \end{aligned}$$

conocidas como *ecuaciones paramétricas de la recta*. Despejando t en ambas ecuaciones e igualándolas:

$$t = \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$

se obtiene la *ecuación cartesiana* de la recta.

Haciendo las operaciones $v_2 (x - x_0) = v_1 (y - y_0) \Rightarrow$

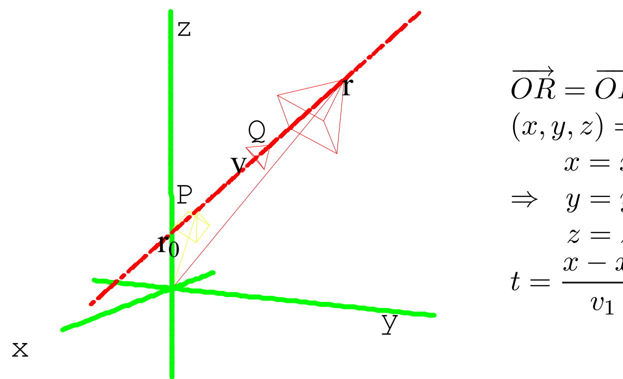
$$Ax + By + C = 0$$

se obtiene la *ecuación general* de la recta, donde $A = v_2$, $B = v_1$ y $C = -v_2 x_0 + v_1 y_0$. Finalmente, la *ecuación explícita* se obtiene de ésta, sin más que despejar la y,

$$y = mx + n$$

con $m = -\frac{A}{B}$, $n = -\frac{C}{B}$.

Esto se traduce literalmente al caso de una recta en el espacio, ya que la ecuación vectorial de la recta es la misma, pero se ha de tener en cuenta que, ahora, los vectores tienen tres componentes.



$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + t\vec{v} \Rightarrow$$
$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t\,(v_1, v_2, v_3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$t = \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{array}\right\}$$

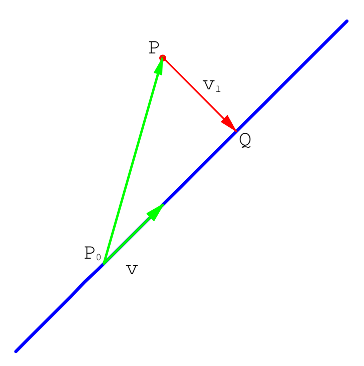
Posición relativa de dos rectas

La posición relativa de dos rectas se puede estudiar a partir del sistema formado por sus ecuaciones generales. Veamos primero el caso de las rectas en el plano, donde hay dos ecuaciones y dos incógnitas. Si el sistema es incompatible ($\text{rg}\, A = 1$, $\text{rg}\, A|B = 2$) las dos rectas son paralelas. Si el sistema es compatible y determinado ($\text{rg}\, A = 2$) las rectas se cortan en un punto, que es la solución del sistema. Si el sistema es compatible pero indeterminado ($\text{rg}\, A = \text{rg}\ A|B = 1$) las dos rectas se superponen.

En el caso de dos rectas en el espacio tendremos cuatro ecuaciones y tres incógnitas. Si el sistema es incompatible, las rectas también se cruzan sin cortarse si $\text{rg}\, A = 3$, $\text{rg}\, A|B = 4$; si el sistema es incompatible pero $\text{rg}\, A = 2$, entonces las dos rectas son paralelas. Si el sistema es compatible y determinado ($\text{rg}\, A = \text{rg}\, A|B = 3$), las rectas se cortan en un punto, que es la solución del sistema. Si el sistema es compatible pero indeterminado ($\text{rg}\, A = \text{rg}\ A|B = 2$), las dos rectas se superponen.

Distancia de un punto a una recta

Dada una recta r y un punto $P(x_0, y_0)$, exterior a ella, la distancia entre este punto y la recta viene dada por



siendo $Q(x, y)$ un punto cualquiera de la recta r. En el caso del plano $\mathbf{R}^2$ la distancia se calcula a partir del producto escalar del vector $\vec{v}_\perp = (A, B)$, perpendicular a la recta, y del vector $\overrightarrow{QP}$, el resultado se escribe

$$d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{v}_\perp\right|}{\|\vec{v}_\perp\|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

En el caso del espacio $\mathbf{R}^3$, la fórmula de la distancia se puede escribir en función del vector director de la recta, $\vec{v}$, utilizando el producto vectorial

$$d(P, r) = \frac{\left\|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}\right\|}{\|\vec{v}\|}$$

siendo Q un punto cualquiera de la recta r.

2.5.2. Planos

Tres puntos que no estén sobre la misma recta definen un plano. Para encontrar la ecuación del plano, consideremos un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ del plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, del que parte un vector $\vec{N} = (A, B, C)$ perpendicular al plano, y un punto cualquiera $Q(x, y, z)$ del espacio. El punto Q pertenecerá al plano si y solo si se anula el producto escalar:

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$$

que, escribiéndolo en términos de las componentes de los vectores se lee:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

que da lugar a la ecuación general del plano:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Posición relativa de dos planos

Si tenemos dos planos en el espacio, de ecuaciones $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, se pueden estudiar sus posiciones relativas a partir del estudio de este sistema. Si el sistema es incompatible los planos son paralelos; si es compatible y el rango del sistema es 2 los planos se cortan en una recta dada por estas ecuaciones. Si es compatible pero de rango 1, los planos son el mismo.

Posición relativa de una recta y un plano

En este caso se tienen tres ecuaciones. Si el sistema es incompatible, la recta y el plano son paralelos ($\text{rg}\, A = 2$, $\text{rg}\, A|B = 3$). Si el sistema es compatible y determinado ($\text{rg}\, A = \text{rg}\, A|B = 3$), la recta y el plano se cortan en un punto, que es la solución del sistema. Si el sistema es compatible pero indeterminado ($\text{rg}\, A = \text{rg}\; A|B = 2$) la recta y el plano se superponen.

Distancia de un punto a un plano

La distancia de un punto $P\,(x_0, y_0, z_0)$ exterior al plano $\pi : Ax+By+Cz+D = 0$ viene dada por la fórmula

$$d\,(P, \pi) = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{N}\right|}{\left\|\vec{N}\right\|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

siendo $Q\,(x, y, z)$ un punto cualquiera del plano, y $\vec{N} = (A, B, C)$ el vector perpendicular al plano π.

Distancia de una recta a un plano

Considerando que la recta y el plano son paralelos, se coge un punto cualquiera de la recta y se aplica la fórmula anterior.

Ejercicio 2.13 *Hallar un vector que sea perpendicular al plano determinado por los puntos* $P\,(0, 1, 0)$, $Q\,(-1, 1, 2)$ *y* $R\,(2, 1, -1)$. *Calcular también el área del triángulo* PQR.

Distancia entre dos rectas que se cruzan

Cuando dos rectas, r_1, r_2, se cruzan su distancia se calcula a partir del producto mixto,

$$d\,(r_1, r_2) = \frac{\left\|\overrightarrow{PQ} \cdot (\overrightarrow{w} \times \vec{v})\right\|}{\|\overrightarrow{w} \times \vec{v}\|}$$

donde $P\,(x_0, y_0, z_0)$ y $Q\,(x_1, y_1, z_1)$ son puntos arbitrarios de las rectas r_1 y r_2; $\overrightarrow{w}$ y $\vec{v}$ son los correspondientes vectores directores.

TEMA 3

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

3.1. VALORES Y VECTORES PROPIOS DE UNA MATRIZ. PROPIEDADES

Consideraremos sólo matrices definidas en los números reales.

Definición 11 *Se dice que λ es un **valor propio** de una matriz cuadrada A si*

$$\exists \vec{x} \in \mathbf{R}^n, \quad \vec{x} \neq \vec{0} \quad / \quad A\vec{x} = \lambda \vec{x}$$

*Los vectores $\vec{x}$ que satisfacen esta ecuación se conocen como **vectores propios** de A asociados al valor propio λ. El conjunto de vectores propios asociados al mismo valor propio genera un subespacio vectorial conocido como **subespacio propio** asociado al valor propio λ.*

$$E_{\lambda=\lambda} = \left\{ \vec{x} \in \mathbf{R}^n, \quad \vec{x} \neq \vec{0} \quad / \quad A\vec{x} = \lambda \vec{x} \right\}$$

El conjunto de valores propios de A se denomina espectro *de A.*

Definición 12 *Dada un matriz A, de orden n, se llama **polinomio característico** de A al polinomio de grado n*

$$p(\lambda) = |A - \lambda I|$$

Ejemplo 3.1 *Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Calcular sus valores y vectores propios, así como una base de cada uno de los subespacios propios.

Solución. $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 5)$

$\Rightarrow \lambda = 1, 5, 5$

$\lambda = 1 \Rightarrow (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - 2y = 0 \\ 4z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S_{\lambda=1} = <(1,1,0)>$$

$$\lambda = 5 \Rightarrow (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{-2x - 2y = 0 \Rightarrow \{x = -y \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S_{\lambda=5} =< (1,-1,0),(0,0,1) >$$

Propiedades

Veremos algunas propiedades de los polinomios característicos

1. **Teorema 5 (Cayley-Hamilton)** *Toda matriz A es raíz de su polinomio característico, es decir*
$$p(A) = 0$$

2. Si A es una raíz de $p(x)$, es decir $p(A) = 0$, entonces también lo es de cualquier polinomio de la forma $q(x) = r(x)p(x)$.

3. Si A y A' son semejantes, es decir $A' = P^{-1}AP$, entonces $p(A)$ y $p(A')$ también son matrices semejantes $p(A') = P^{-1}p(A)P$

4. Si $p(x)$ es el polinomio característico de la matriz A, se puede escribir como potencias de esta matriz:
$$p(A) = (-1)^n A^n + ... + a_1 A + a_0 I = 0$$
lo que permite despejar A^n en términos de un polinomio de grado $(n-1)$.

3.2. DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

Definición 13 *Una matriz cuadrada A es **diagonalizable** si existe una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal D. Se dice que la matriz P diagonaliza a A.*

Teorema 6 *Una matriz $(n \times n)$ es diagonalizable si, y sólo si, tiene n vectores propios linealmente independientes.*

La demostración de este teorema indica que la matriz P está formada por los vectores propios de A escritos en columna. La matriz P se conoce como *matriz de paso.*

La matriz diagonal $D = P^{-1}AP$ es aquella que tiene los valores propios en la diagonal.

Ejemplo 3.2 *Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz diagonal y la matriz de paso.*

Solución. La matriz de paso estará formada por los vectores propios encontrados en el ejemplo anterior,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

3.3. ORTOGONALIDAD

Definición 14 *Se dice que una matriz Q es **ortogonal** si*

$$Q^{-1} = Q^T.$$

Definición 15 *Se dice que una matriz A es **diagonalizable ortogonalmente** si existe una matriz ortogonal Q tal que la matriz $Q^{-1}AQ$ es diagonal.*

La forma de encontrar esta matriz ortogonal es encontrando un conjunto de vectores propios de A que sean ortogonales entre sí y además tengan modulo unidad. Estos vectores se llaman **ortonormales**.

Ejemplo 3.3 *Diagonalizar ortogonalmente la matriz* $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Solución. Ya sabemos que los vectores propios de esta matriz son:

$S_{\lambda=1} =< (1,1,0) >$, $S_{\lambda=5} =< (1,-1,0),(0,0,1) >$. Vamos a comprobar si son ortogonales:

$(1,1,0)\cdot(1,-1,0) = 0$

$(1,1,0)\cdot(0,0,1) = 0$

$(1,-1,0)\cdot(0,0,1) = 0.$

Por tanto buscaremos los vectores unitarios, dividiendo las componentes de cada vector por su módulo.

$$\left.\begin{matrix} (\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0) \\ (\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0) \\ (0,0,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = Q^TAQ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.1 *Diagonaliza ortogonalmente la matriz* $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

El interés de las matrices ortogonales es, entre otros, que representan giros en el espacio vectorial en el que están definidas. No obstante, hay que señalar que no todas las matrices admiten diagonalización ortogonal.

3.3.1. Aplicación: transformaciones ortogonales en dimensión 2 y 3

Consideraremos aquí las matrices ortogonales sobre espacios de dimensión 2 o 3. En el caso en el que el determinante de estas matrices sea $+1$ las matrices representan una *rotación*, si es -1 representan una *simetría ortogonal*, estudiaremos las rotaciones.

Consideremos una rotación en el plano $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, la matriz asociada a esta aplicación f se escribe

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

donde $0 \leq \alpha \leq \pi$ si se considera el giro positivo y $-\pi \leq \alpha \leq 0$ si el sentido de giro es negativo. En cualquier otra base ortonormal con la misma orientación que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, la matriz de f no cambia, sigue siendo la anterior.

Ejemplo 3.4 *Dada la transformación ortogonal* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *con respecto de la base ortonormal* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, *cuya matriz asociada es* $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. *Obtener los vectores* $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$ *tales que* $f(\vec{u}) = \vec{u}$ *y* $f(\vec{v}) = -\vec{v}$.

Solución. $r(\vec{u}) = A\vec{u} = \vec{u} \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} u_1\cos\alpha - u_2\sin\alpha = u_1 \\ u_1\sin\alpha + u_2\cos\alpha = u_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} u_1(\cos\alpha - 1) = u_2\sin\alpha \\ u_2(\cos\alpha - 1) = -u_1\sin\alpha \end{array}\right\}.$$

Si $(\cos\alpha - 1) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ y cualquier vector cumple esta condición.

Si $\alpha \neq 0$, dividiendo ambas ecuaciones $\Rightarrow \dfrac{u_1}{u_2} = -\dfrac{u_2}{u_1} \Rightarrow u_1^2 + u_2^2 = 0$.

Luego, el único vector que permanece invariante bajo esta rotación es el vector nulo $\vec{u} = (0, 0)$.

$$f(\vec{v}) = A\vec{v} = \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} v_1\cos\alpha - v_2\sin\alpha = -v_1 \\ v_1\sin\alpha + v_2\cos\alpha = -v_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} v_1(\cos\alpha + 1) = v_2\sin\alpha \\ v_2(\cos\alpha + 1) = -v_1\sin\alpha \end{array}\right\}.$$

Si $(\cos\alpha + 1) = 0 \Rightarrow \alpha = \pi$ y cualquier vector cumple esta condición.

Si $\alpha \neq \pi$, dividiendo ambas ecuaciones $\Rightarrow \dfrac{v_1}{v_2} = -\dfrac{v_2}{v_1} \Rightarrow v_1^2 + v_2^2 = 0$

Luego, el único vector que cumple esta condición es el vector nulo $\vec{v} = (0, 0)$.

En el caso tridimensional, sea $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, la matriz de f en una base ortonormal $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ correspondiente a una rotación de ángulo α alrededor de la recta cuyo vector director es $\vec{e}_1$, se escribe

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

II CÁLCULO DIFERENCIAL

TEMA 4

FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

4.1. INTRODUCCIÓN. FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Definición 16 *Dados dos conjuntos de números reales, D y D', una* función f *es una regla que asigna a cada elemento de D un elemento de D'.*

Dado un elemento x de D, el elemento y de D' que f asigna a x se conoce como imagen *de x, se suele leer $y = f(x)$, $x \in D$, $y \in D'$. Los números x e y se conocen como* variables*, x es la variable independiente e y es la variable dependiente.*

4.1.1. Dominio e imagen de una función

El conjunto D, donde está definida la función, se conoce como el *dominio* de la función f. El conjunto de los elementos de D' que son imagen de algún elemento $x \in D$ se conoce como *conjunto imagen* o *recorrido* de la función f.

Ejemplo 4.1 *La función $f(x) = x^2$ asigna a cada número real su cuadrado, que siempre es positivo, por lo que el dominio de la función son todos los números reales y su recorrido los reales positivos* $\Rightarrow \operatorname{dom}(f) = \mathbf{R}$, $\operatorname{Im}(f) = [0, \infty)$.

Ejemplo 4.2 $f(x) = \sqrt{x+2}$ *tiene por dominio sólo aquellos números reales que hacen que el radicando sea positivo, es decir, $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$, por tanto* $\operatorname{dom}(f) = [-2, \infty)$*, mientras que sus imágenes siempre son positivas, por tanto* $\operatorname{Im}(f) = [0, \infty)$.

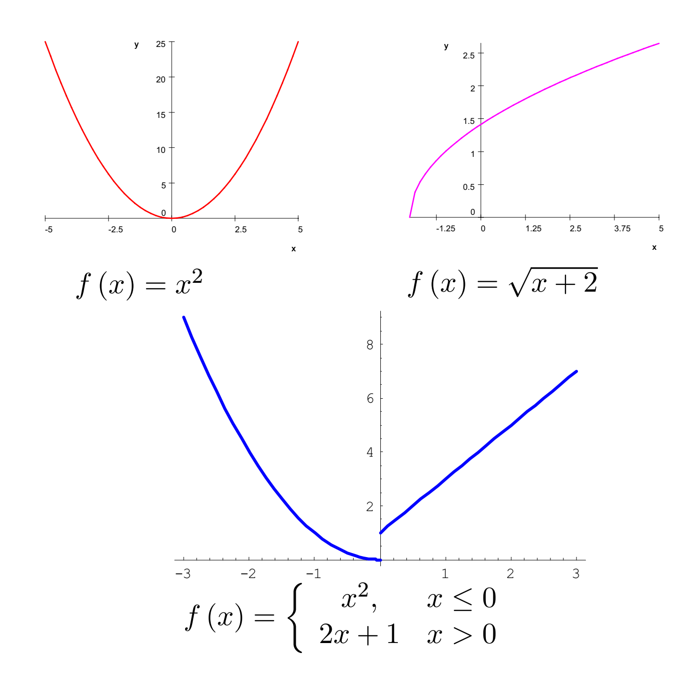
A veces se necesita más de una regla para definir una función, por ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ 2x + 1 & x > 0 \end{cases}$$

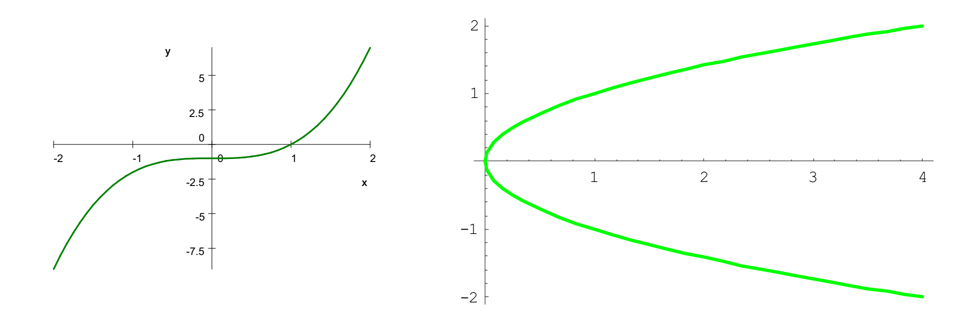
es una función definida a trozos. Su definición indica que el dominio son todos los números reales, pero el recorrido son los reales positivos.

4.1.2. Gráficas de funciones de una variable

Si $f(x)$ es una función que tiene por dominio el conjunto D, la gráfica de f es el conjunto de los puntos del plano (x, y) tales que $x \in D$ e $y = f(x)$. En general, al dibujarlos se obtiene una curva. Las gráficas de las funciones anteriores son



De la representación geométrica de una función surge la pregunta inversa. Dada una curva en el plano, ¿cuándo es la gráfica de una función? Como a cada x del dominio de la función le corresponde una sóla imagen, se deduce que una recta vertical sólo puede cortar a la curva en **un** punto si la curva es la gráfica de una función, si la corta en más puntos ya no lo es. Una de las curvas siguientes es la gráfica de una función y la otra no, ¿cuál es cuál?



Es interesante utilizar un programa de ordenador o una calculadora gráfica para dibujar las gráficas de funciones que aparecen en este tema y otros posteriores.

4.1.3. Funciones elementales

Los tipos básicos de funciones que utilizaremos a lo largo del curso serán funciones polinómicas, racionales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Estas funciones se denominan funciones elementales. Las repasaremos brevemente.

Funciones polinómicas

Una función polinómica es aquella definida por un polinomio de grado n

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ son números reales. El dominio de una función polinómica son todos los reales. Su recorrido depende del grado del polinomio y del valor de los coeficientes.

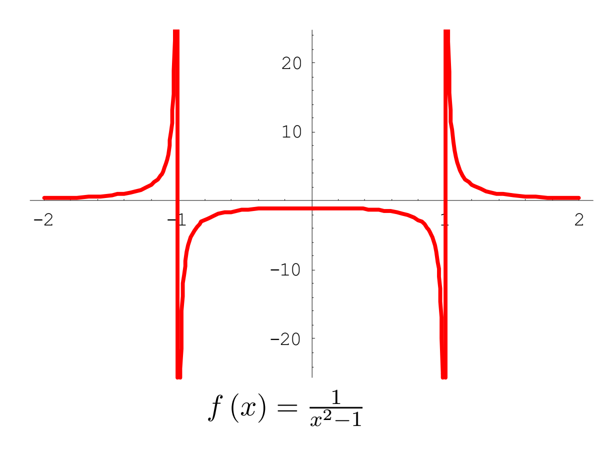
Funciones racionales

Una función racional es el cociente de dos polinomios

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Como la división por cero no está permitida, el dominio de una función racional son todos los reales menos aquellos valores que anulen el denominador, es decir, $\operatorname{dom}(f) = \mathbf{R} - \{\text{raíces de } Q(x)\}$.

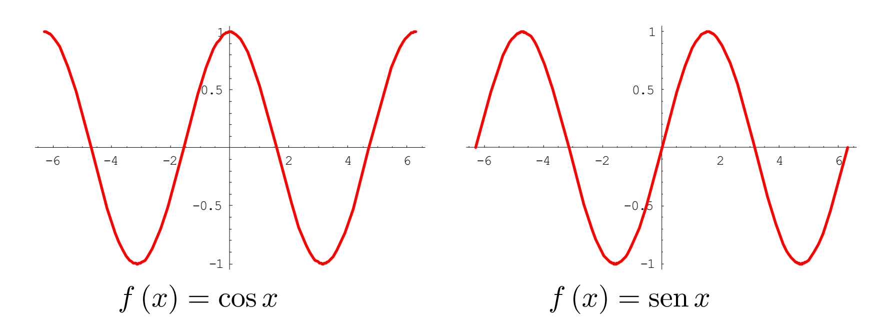
Ejemplo 4.3 *La función* $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ *no está definida cuando* $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, -1$. *Luego* $\operatorname{dom}(f) = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$. *Al dibujarla se obtienen dos asíntotas verticales en* $x = 1$ *y* $x = -1$.



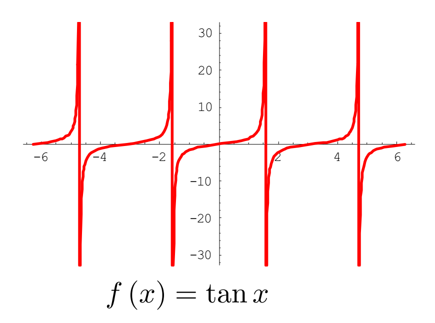
$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

Funciones trigonométricas

Para definir las funciones trigonométricas se ha de utilizar la circunferencia unidad y la medida de los ángulos en radianes. Las funciones trigonométricas básicas son: seno, coseno, tangente y sus inversas respecto del producto: cosecante, secante y cotangente. Se recuerda que son funciones periódicas, es decir, se repiten cada vez que se da una vuelta entera a la circunferencia, por lo que se dice que tienen periodo 2π. Sus gráficas son:

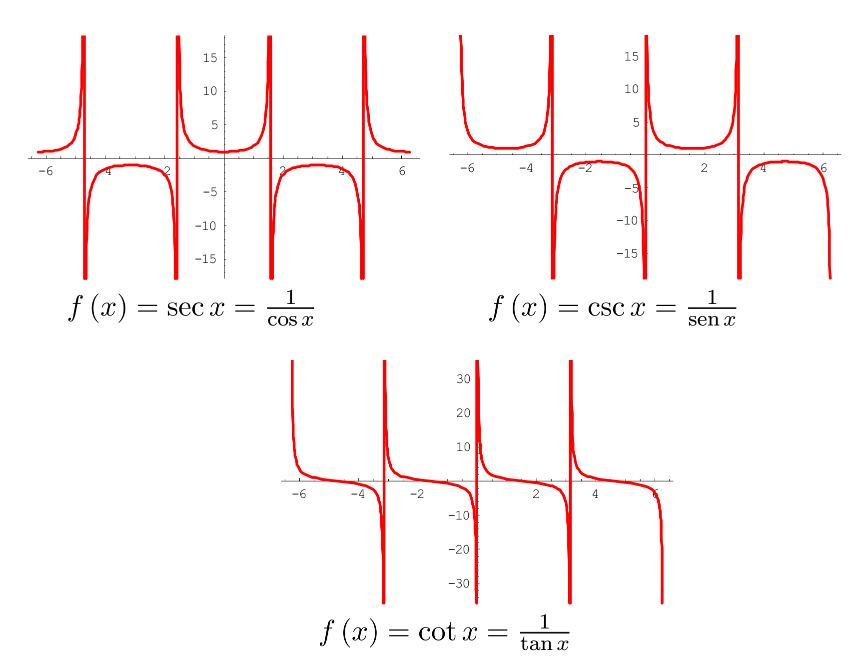


$f(x) = \cos x$ $\qquad$ $f(x) = \operatorname{sen} x$



$f(x) = \tan x$

y sus inversas:



$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ $\qquad$ $f(x) = \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

$f(x) = \cot x = \frac{1}{\tan x}$

Nótese que las funciones tangente y secante tienen asíntotas verticales en los valores que anulan el coseno y las funciones cotangente y cosecante tienen asíntotas verticales en los valores que anulan el seno.

Por tanto, el estudio de sus dominios y recorridos nos da:

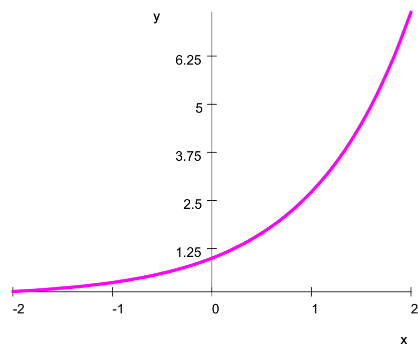
$\operatorname{dom}(\cos x) = \mathbf{R}$, $\operatorname{Im}(\cos x) = [-1, 1]$,

$\operatorname{dom}(\operatorname{sen} x) = \mathbf{R}$, $\operatorname{Im}(\operatorname{sen} x) = [-1, 1]$,

$\operatorname{dom}(\tan x) = \mathbf{R} - \{\pm\frac{(2n+1)\pi}{2}, n = 0, 1, 2, 3, ...\}$, $\operatorname{Im}(\tan x) = \mathbf{R}$.
$\operatorname{dom}(\sec x) = \mathbf{R} - \{\pm\frac{(2n+1)\pi}{2}, n = 0, 1, 2, 3, ...\}$, $\operatorname{Im}(\sec x) = \mathbf{R}$.
$\operatorname{dom}(\csc x) = \mathbf{R} - \{\pm n\pi, n = 0, 1, 2, 3, ...\}$, $\operatorname{Im}(\csc x) = \mathbf{R}$.
$\operatorname{dom}(\cot x) = \mathbf{R} - \{\pm n\pi, n = 0, 1, 2, 3, ...\}$, $\operatorname{Im}(\cot x) = \mathbf{R}$.

Funciones exponenciales

La función exponencial es $f(x) = e^x$, siendo $e = 2.7183...$ un número irracional. De su definición se observa que el dominio son todos los números reales, $\operatorname{dom}(f) = \mathbf{R}$, pero que la imagen siempre es positiva, por lo que $\operatorname{Im}(f) = (0, \infty)$. Su gráfica es:



$$f(x) = e^x$$

y las propiedades más importantes son las de las potencias:

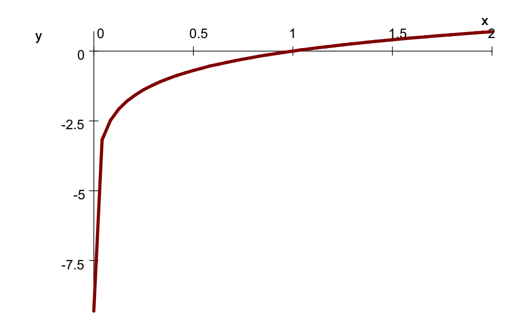
- $e^{a+b} = e^a e^b$
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
- $e^x > 0,\ x \in \mathbf{R}$

Funciones logarítmicas

La función logarítmica es la inversa de la función exponencial. Utilizaremos sólo logarítmos en base natural, es decir, tomando al número e como base

$$\log x = y \Leftrightarrow x = e^y$$

lo que nos indica que su dominio son sólo los números positivos, $\operatorname{dom}(f) = (0, \infty)$, mientras que $\operatorname{Im} f = \mathbf{R}$. Su gráfica es:



$$f(x) = \log x$$

Al deducir sus propiedades más importantes se observa que es una función que transforma multiplicaciones y divisiones en sumas y restas:

- $\log(ab) = \log a + \log b$
- $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$
- $\log(a)^b = b \log a$

4.1.4. Álgebra de funciones

A menudo, las funciones que estudiaremos serán combinaciones de las funciones anteriores. Las combinaciones algebraicas son la suma, diferencia, producto y cociente. Dadas dos funciones reales de variable real f y g, estas combinaciones se definen como:

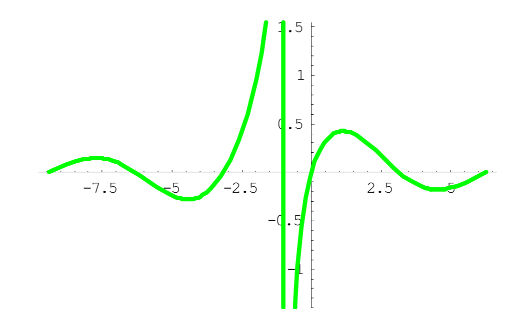
- **suma:** $[f+g](x) = f(x) + g(x)$
- **diferencia:** $[f-g](x) = f(x) - g(x)$
- **producto:** $[f \cdot g](x) = f(x) \cdot g(x)$
- **cociente:** $\left[\dfrac{f}{g}\right](x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

De estas definiciones se observa que el dominio es la intersección de los dominios, es decir, el dominio de $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ y $\dfrac{f}{g}$ es $\operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)$. La definición de $\dfrac{f}{g}$ exige además que $g(x) \neq 0$.

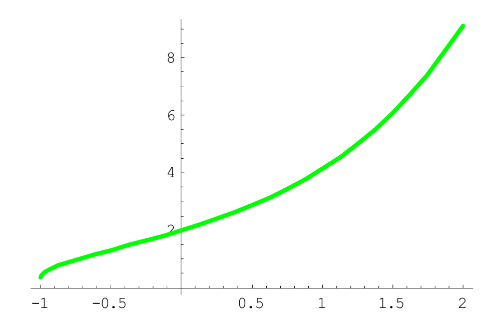
Ejemplo 4.4 *Estudia los dominios de las funciones siguientes:*

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x+1}, \quad f(x) = e^x + \sqrt{x+1}, \quad f(x) = x \log(x-1)$$

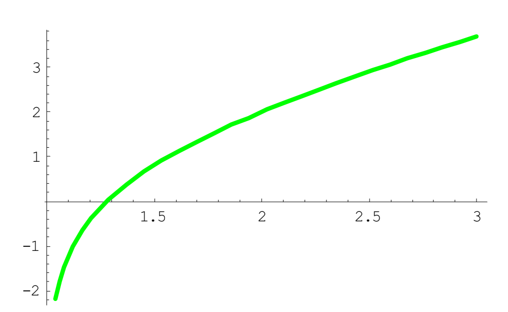
Solución. Los dominios y gráficas de las funciones son:



$f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x+1}$	
$\operatorname{dom} \operatorname{sen}(x) = \mathbf{R}$ $\operatorname{dom} \dfrac{1}{x+1} = \mathbf{R} - \{-1\}$	$\Rightarrow \operatorname{dom} f = \mathbf{R} - \{-\mathbf{1}\}$
asíntota vertical en $x = -1$	



$f(x) = e^x + \sqrt{x+1}$
$\left.\begin{array}{l} \text{dom}\, e^x = \mathbf{R} \\ \text{dom}\, \sqrt{x+1} = [-\mathbf{1}, \infty) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{dom}\, f = [-\mathbf{1}, \infty)$



$f(x) = x \log(x-1)$
$\left.\begin{array}{l} \text{dom}\, x = \mathbf{R} \\ \text{dom}\, (\log(x-1)) = (-\mathbf{1}, \infty) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{dom}\, f = (-\mathbf{1}, \infty)$
asíntota vertical en $x = 1$

- **composición de funiones**: otra forma de combinar dos funciones es componerlas, es decir, a un número x le hacemos corresponder un número $g(x)$ y a $g(x)$ le hacemos corresponder el número $f(g(x))$, por lo que podemos decir que al número x le hacemos corresponder el número $f(g(x))$. Esta nueva función se conoce como composición de f y g : $[f \circ g](x) = f(g(x))$. El dominio depende de la función que se obtiene.

Ejemplo 4.5 *Sean* $f(x) = x^2$ *y* $g(x) = x + 3$, *estudia* $[f \circ g]$ *y* $[g \circ f]$

Solución. $[f \circ g](x) = f(g(x)) = f(x+3) = (x+3)^2$, $\quad$ dom $[f \circ g] = \mathbf{R}$.
$[g \circ f](x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 3$, $\quad$ dom $[g \circ f] = \mathbf{R}$.

Ejemplo 4.6 *Sean* $f(x) = \sqrt{x-1}$ *y* $g(x) = 2x^2 + 1$, *estudia* $[f \circ g]$ *y* $[g \circ f]$

Solución. $[f \circ g](x) = f(g(x)) = f(2x^2+1) = \sqrt{2x^2+1-1} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}x$,

dom $[f \circ g] = \mathbf{R}$.
$[g \circ f](x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-1}) = 2(\sqrt{x-1})^2 + 1 = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$,

dom $[g \circ f] = \mathbf{R}$

4.1.5. Límite de una función en un punto

Los límites no sólo son importantes en el cálculo, sino que sin límites el cálculo **no** existiría. Cualquier noción de cálculo es un límite en uno u otro sentido.

Dada una función f definida cerca de un número x_0 (aunque no necesariamente en x_0), decimos que L es el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a x_0 (x tiende a x_0), y lo denotamos como

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

si, y sólo si, los valores de $f(x)$ se aproximan (tienden) a L a medida que los valores de x se acercan (tienden) a x_0.

Ejemplo 4.7 $\lim_{x\to 1}\left(x^2-x+1\right)=1^2-1+1=1$

Ejemplo 4.8 *Sea* $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$, *aunque* $f(x)$ *no está definida en* $x=3$, *sí que lo está en cualquier valor cercano a 3, entonces:*

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6.$$

Los números cercanos a x_0 se dividen en dos clases, los que están a la izquierda y los que están a la derecha, se definen los límites laterales como:

$\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, límite por la izquierda, indicando que x se acerca a x_0 con valores menores que x_0; y

$\lim_{x\to x_0^+} f(x)$, límite por la derecha, indicando que x se acerca a x_0 con valores mayores que x_0.

Corolario 4 $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ *si, y sólo si, los límites laterales coinciden y valen* L, *es decir,*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$$

La definición precisa de estos conceptos es:

Definición 17 *Sea* f *una función definida al menos en un intervalo de la forma* (x_0-p,x_0+p), *con* $p>0$. *Entonces*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L$$

si, y sólo si, para cada $\varepsilon>0$ *existe un* $\delta>0$ *tal que si* $|x-x_0|<\delta$, *entonces* $|f(x)-L|<\varepsilon$.

Por ejemplo, se observa que la función a trozos definida anteriormente

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0\\ 2x+1 & x>0\end{cases}$$

no tiene límite en 0 ya que los límites laterales no coinciden:

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0} x^2=0,$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}(2x+1)=2\cdot 0+1=1.$

El cálculo de límites nos permite dibujar las asíntotas verticales de una función. Por ejemplo, al dibujar la función $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ se observaban dos asíntotas verticales en $x=1$ y $x=-1$. Al calcular los límites de la función en estos puntos se obtiene:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{0}=\infty,\ \lim_{x\to -1}\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{0}=\infty,$$

estos límites no existen pero se suelen denotar como ∞, lo que indica que la función se acerca a ∞. Al calcular los límites laterales vemos el signo de este infinito:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2-1}=-\infty,\ \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x^2-1}=\infty,\ \lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x^2-1}=\infty,\ \lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x^2-1}=-\infty$$

lo que concuerda con la gráfica obtenida.

Algunos resultados importantes sobre límites son:

Teorema 7 *El límite de una función en un punto, si existe, es único.*

Teorema 8 *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ *y* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$ *entonces:*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M.$

2. $\lim\limits_{x\to x_0} [a \cdot f(x)] = aL$, *siendo* a *un número real cualquiera.*

3. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)\, g(x)] = LM.$

4. $\lim\limits_{x\to x_0} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{L}{M}$, *si* $M \neq 0.$

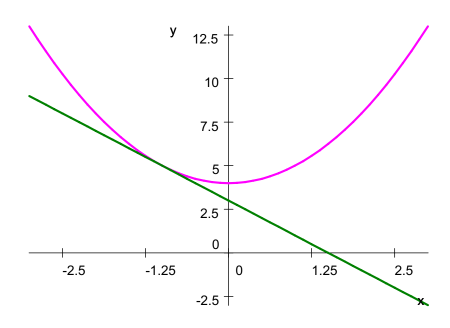
Como se ha comentado, la noción de límite permite obtener las definiciones del cálculo. Si tenemos uns función $f(x)$ definida en un intervalo I, una recta secante a ella es una recta que la corta en dos puntos; supongamos que la corta en los puntos $(x, f(x))$ y $(x_0, f(x_0))$, la pendiente de la recta secante viene dada por $m_{\text{sec}} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Si hacemos que x se aproxime a x_0 entonces la secante se aproxima a la **recta tangente** (aquella que toca a la curva en un único punto), por tanto, la pendiente de la recta tangente es:

$$m_{tg} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si existe este límite.

Ejemplo 4.9 *Calcular la recta tangente a la curva* $f(x) = x^2 + 4$ *en el punto* $x = -1$.

Solución. Si $x = -1$ la recta tangente pasa por el punto $(x_0, f(x_0)) = (-1, 5)$; su pendiente se calcula como el límite



$$m = \lim_{x\to -1} \frac{x^2 + 4 - 5}{x + 1} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} =$$
$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} =$$
$$= \lim_{x\to -1} (x - 1) = -2,$$

recta tangente: $\boxed{y - 5 = -2(x + 1)}$

4.1.6. Continuidad

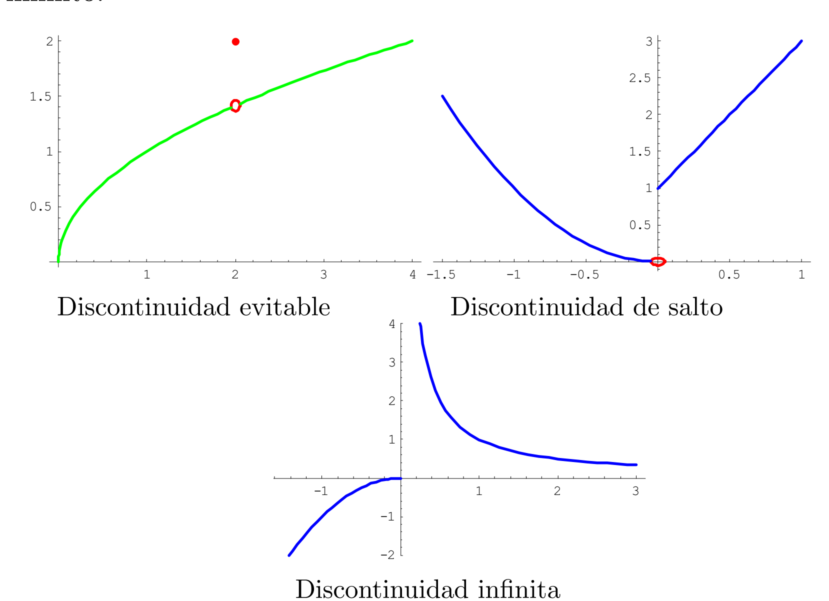
Mientras que para calcular el límite de una función en un punto no es necesario que la función esté definida en dicho punto para estudiar la continuidad de una función en un punto **sí** que es necesario que esté definida en ese punto.

Definición 18 *Sea* f *una función definida en un intervalo abierto* $(x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$. *Decimos que* f *es continua en* x_0 *si y solo si*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Si f no es continua en un punto es *discontinua* en ese punto. Hay tres tipos de discontinuidad:

- **discontinuidad evitable**. Si existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ pero es distinto de $f(x_0)$.
- **discontinuidad de salto**. No existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, es decir, los límites por la derecha e izquierda no coinciden, pero son números reales.
- **discontinuidad infinita**. No existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, y alguno de los límites laterales es infinito.



Discontinuidad evitable   Discontinuidad de salto

Discontinuidad infinita

Si f es continua en todos los puntos de un intervalo, se dice que es *continua en ese intervalo.* Intuitivamente, f es continua si se puede dibujar sin huecos ni saltos.

Definición 19 *Se dice que una función $f(x)$ está* acotada superiormente *por un número S si, y sólo si, $f(x) \leq S$ para todo x del dominio de la función. Se dice que una función $f(x)$* está acotada inferiormente *por un número s si, y sólo si, $f(x) \geq s$ para todo x del dominio de la función. Se dice que una función $f(x)$* está acotada *si está acotada inferior y superiormente.*

Hay dos propiedades fundamentales de las funciones continuas:

Teorema 9 (del valor intermedio) *Si f es continua en un intervalo $[a, b]$, y k es un número entre $f(a)$ y $f(b)$, existe al menos un número $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.*

Teorema 10 (de los valores extremos) *Si f es continua en un intervalo $[a, b]$. Entonces:*

1. *f está acotada en $[a, b]$.*
2. *f alcanza un valor máximo M y un valor mínimo m en $[a, b]$.*

4.2. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Trabajaremos con funciones definidas en el plano y en el espacio y veremos cómo ampliar lo estudiado para funciones de una variable a funciones de dos y tres variables. Empezaremos con funciones escalares.

Si D es un conjunto no vacío del plano $\mathbf{R}^2$, una regla f que asigna un número real $f(x, y)$ a cada punto (x, y) de D se llama función real de dos variables. Al igual que en el caso de funciones de una variable, el conjunto D se conoce como *dominio* de f y el conjunto de los valores reales $f(x, y)$ se conoce como *imagen* de f.

Ejemplo 4.10 *Sea* $D = \{(x, y) \,|x^2 + y^2 \leq 1\}$, *el disco unidad.*
A cada punto de D *le asignamos el número* $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$,
$\operatorname{Im} f = [0, 1]$.

De forma análoga, si D es un conjunto no vacío del espacio $\mathbf{R}^3$, una regla f que asigna un número real $f(x, y, z)$ a cada punto (x, y, z) de D se llama función real de tres variables. El conjunto D se conoce como *dominio* de f y el conjunto de los valores reales $f(x, y, z)$ se conoce como *imagen* de f.

Ejemplo 4.11 *Sea* $D = \{(x, y, z) \,|x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, *la esfera unidad.*
A cada punto de D *le asignamos el número* $f(x, y, z) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2 + z^2)}$, $\operatorname{Im} f = [0, 1]$.

Las funciones de varias variables son esenciales en muchos problemas importantes de la ciencia, la ingeniería, la economía, etc., además de surgir de forma natural en matemáticas. De hecho, la mayor parte de los problemas reales implican funciones de varias variables:

- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, distancia del punto (x, y) al origen.
- $f(x, y) = xy$, área del rectángulo de dimensiones x e y.
- $f(x, y) = 2(x + y)$, perímetro del rectángulo de dimensiones x e y.
- $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, distancia del punto (x, y, z) al origen.
- $f(x, y, z) = xyz$, volumen del paralelepípedo rectangular de dimensiones x, y, z.
- $f(x, y, z) = 2(xy + xz + yz)$, superficie del paralelepípedo rectangular de dimensiones x, y, z.

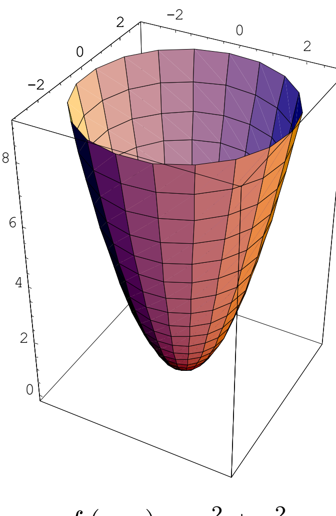
El cálculo del dominio y la imagen de funciones de dos y tres variables puede ser bastante complicado. No se suelen dar de forma explícita, se sobreentiende que es el conjunto de puntos en los cuales tiene sentido la definición de la función, se ha de tener en cuenta las reglas ya conocidas para funciones de una variable.

Ejemplo 4.12 *El dominio de la función* $f(x, y) = \dfrac{1}{x - y}$ *es todo el plano* xy *menos los puntos donde se anula el denominador,* $x = y$, *es decir, menos la recta* $y = x$, $\operatorname{dom}(f) = \mathbf{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x = y\}$.

Al igual que antes, se dice que una función está *acotada* si su imagen está acotada.

4.2.1. Gráficas de funciones de dos variables. Curvas de nivel

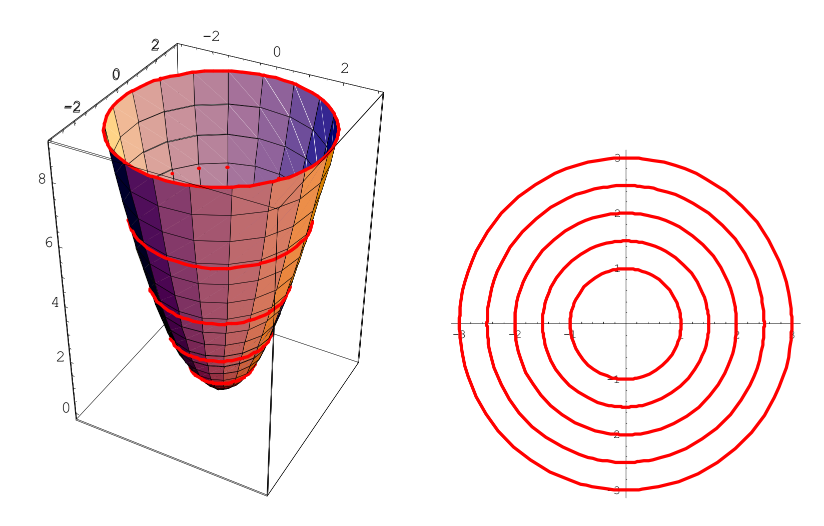
Dada un función de dos variables $f(x, y)$ definida en un subconjunto D del plano xy, entendemos por gráfica de f a la gráfica de la ecuación $z = f(x, y)$. Por ejemplo, la gráfica de la función $z = f(x, y) = x^2 + y^2$, cuyo dominio es todo el plano, es un paraboloide:



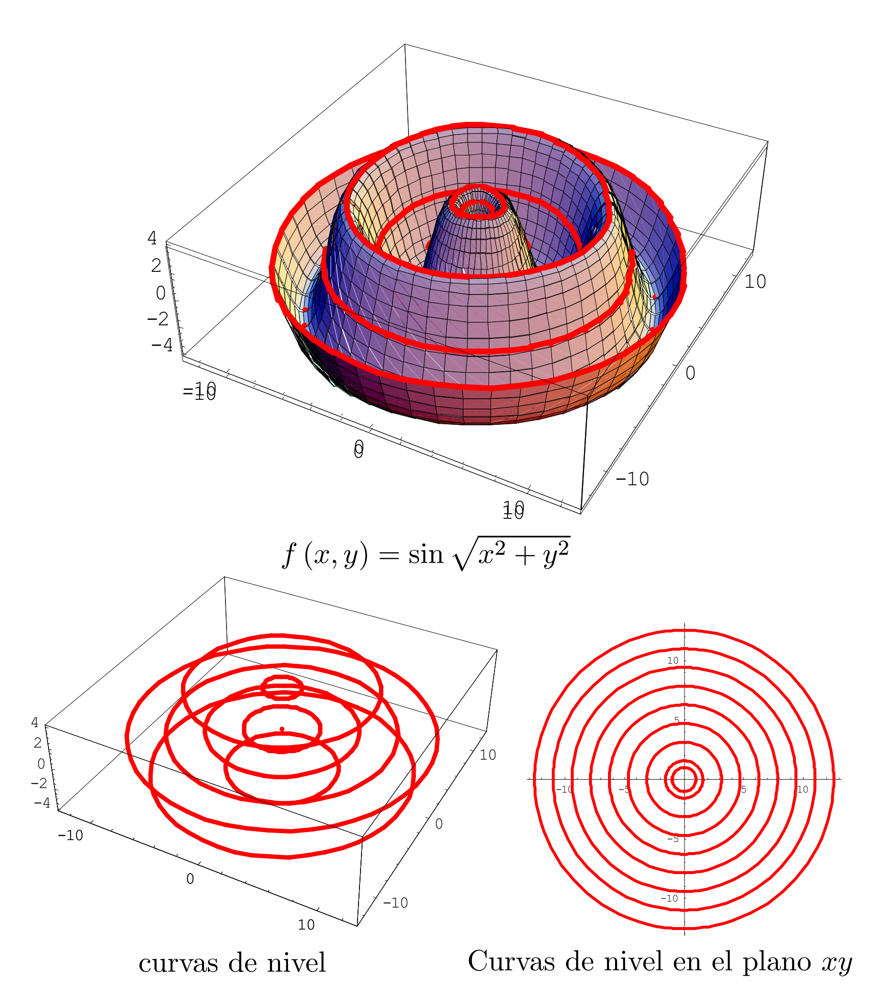
$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

En la práctica, una función de dos variables es difícil de dibujar y, a menudo, difícil de interpretar aunque consiga trazarse. Veremos, no obstante, un método que se utiliza para elaborar mapas. Para representar terrenos montañosos se dibujan curvas que unen los puntos de la misma altura. Una colección de tales curvas, rotuladas apropiadamente, da una buena idea de como varía la altitud de una región.

Se puede hacer lo mismo para representar funciones de dos variables, es decir, dada una función $f(x, y)$ dibujaremos las curvas para valores de z constante, $f(x, y) = c$; a estas curvas se le conocen como *curvas de nivel de la función* f. Cada una de estas curvas está en el plano $z = c$, por lo que después se proyectan todas en el plano xy, tal y como se ve en la figura:



Un ejemplo más complicado es la representación del ‹ ‹sombrero››,



$f(x,y) = \sin\sqrt{x^2+y^2}$

curvas de nivel — Curvas de nivel en el plano xy

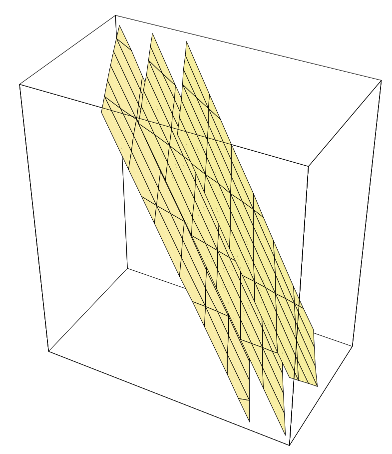
No obstante, se recomienda la utilización de los programas de ordenador para dibujar las superficies.

4.2.2. Funciones de tres variables. Superficies de nivel

Las funciones de tres variable, $V = f(x,y,z)$, **no** se pueden dibujar, ya que se necesita un espacio de cuatro dimensiones. No obstante, se puede estudiar el comportamiento de estas funciones y también dibujar las superficies de nivel, es decir aquellas superficies para las que la función toma un valor constante, $f(x,y,z) = c$. El dibujo de estas superficies es, en general, difícil; veremos algunos ejemplos sencillos.

Ejemplo 4.13 *Para la función* $f(x,y,z) = Ax + By + Cz$ *las superficies de nivel son los planos*

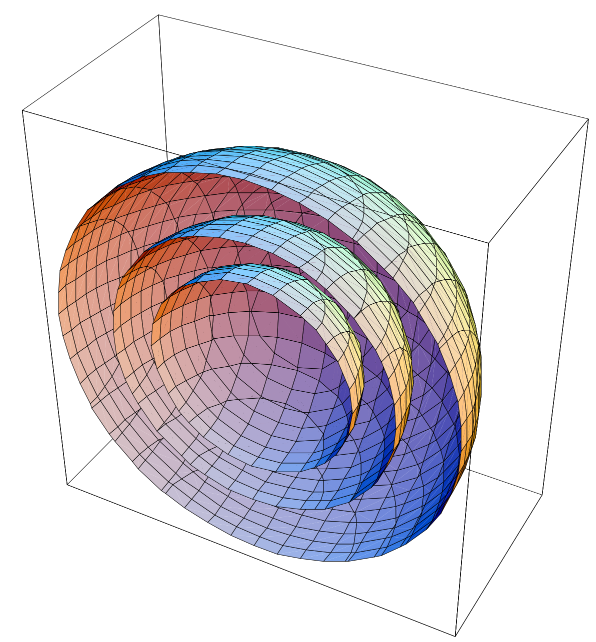
$$Ax + By + Cz = c$$



Superficies de nivel $2x + y + z = c$

Ejemplo 4.14 *Para la función* $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, *la superficies de nivel son las ésferas concéntricas*

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2$$



Superficies de nivel $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$, *para* $z > 0$.

TEMA 5

CÁLCULO DIFERENCIAL

5.1. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Definición 20 *Sea $y = f(x)$ una función. Si existe el límite y es finito*

$$f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

se conoce como la derivada *de la función en el punto x_0.*

Del tema anterior se observa que coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en el punto $x = x_0$. Por tanto, la ecuación de la recta tangente a una función en un punto $x = x_0$ se escribe

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

En general, la derivada de una función es:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Recordemos las derivadas de las funciones elementales:

- La derivada de una constante es cero.
- Si $f(x) = x^n$ entonces $f'(x) = nx^{n-1}$, siendo n un número real no nulo.
- Si $f(x) = \operatorname{sen} x$ entonces $f'(x) = \cos x$.
- Si $f(x) = \cos x$ entonces $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.
- Si $f(x) = \tan x$ entonces $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- Si $f(x) = e^x$ entonces $f'(x) = e^x$.
- Si $f(x) = \log x$ entonces $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Veamos qué sucede al combinar estas funciones.

5.2. CÁLCULO DE DERIVADAS

Estudiaremos las propiedades que cumplen las derivadas cuando las funciones son combinaciones de las funciones anteriores.

5.2.1. Derivadas de suma, producto y cociente de funciones

Las combinaciones algebraicas son la suma, diferencia, producto y cociente. Dadas dos funciones reales de variable real f y g, la derivada de estas combinaciones es:

- La derivada de una suma es la suma de las derivadas:

  $[f+g](x) = f(x) + g(x) \Rightarrow [f+g]'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- diferencia: $[f-g]'(x) = f'(x) - g'(x)$.
- Si C es una constante $[Cf](x) = Cf(x) \Rightarrow [Cf]'(x) = Cf'(x)$.

  La derivada de un producto y de un cociente de funciones cumplen reglas más complejas.
- producto: $[f \cdot g]'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
- cociente: $\left[\dfrac{f}{g}\right]'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Donde hemos supuesto que todas las funciones son derivables, y que $[g(x)] \neq 0$ en el caso de la función cociente.

Ejemplo 5.1 *Calcular la derivada de:*

1. $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$.
2. $f(x) = \csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$.
3. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-2} - x\frac{2x}{2\sqrt{x^2-2}}}{\left(\sqrt{x^2-2}\right)^2} = \dfrac{-2}{(x^2-2)\sqrt{x^2-2}}$.

5.2.2. Derivada de la función compuesta. Regla de la cadena

Cuando una función es una función **compuesta,** es decir, depende de una función que, a su vez, depende de la variable respecto de la cual estamos calculando la derivada, $f(g(x))$, la derivada sigue la llamada **regla de la cadena**:

Teorema 11 *Si g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$, entonces la función compuesta $f \circ g$ es derivable en x y su derivada es:*

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\, g'(x)$$

Ejemplo 5.2 *Calcular la derivada de:*

1. $f(x) = \operatorname{sen} x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x\cos x^2$.
2. $f(x) = \cos\left(x^3+2x\right) \Rightarrow f'(x) = -\left(3x^2+2\right)\operatorname{sen}\left(x^3+2x\right)$.
3. $f(x) = (2x+e^x)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(2x+e^x)^2(2+e^x)$.
4. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow f'(x) = 2\operatorname{sen} x\cos x$.

5.2.3. Derivación implícita

Hasta ahora hemos visto cómo se calculaban las dervadas donde la función dependía explícitamente de la variable, es decir, $y = f(x)$. Veamos cómo derivar ecuaciones donde ambas variables aparecen relacionadas de forma implícita y, en general, no se puede despejar y en función de x.

Ejemplo 5.3 *Calcular la derivada de y en la ecuación:*

$$2xy - y^3 + 1 = x + 2y$$

Solución. Derivamos a ambos lados de la igualdad, aplicando las reglas conocidas y despejamos:

$$2y + 2xy' - 3y^2y' = 1 + 2y' \Rightarrow -2y' + 2xy' - 3y^2y' = 1 - 2y \Rightarrow$$

$$y'\left(-2+2x-3y^2\right) = 1 - 2y \Rightarrow y' = \frac{1-2y}{-2+2x-3y^2}.$$

Ejemplo 5.4 *Calcular la derivada de y en la ecuación:*

$$\cos(x-y) = (2x+y)^3$$

Solución. Derivamos a ambos lados de la igualdad, aplicando las reglas conocidas y despejamos:

$$-\operatorname{sen}(x-y)(1-y') = 3(2x+y)^2(2+y') \Rightarrow$$

$$-\operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x-y)y' = 3(2x+y)^2 2 + 3(2x+y)^2 y' \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}(x-y)y' - 3(2x+y)^2 y' = 6(2x+y)^2 + \operatorname{sen}(x-y) \Rightarrow$$

$$\left(\operatorname{sen}(x-y) - 3(2x+y)^2\right)y' = 6(2x+y)^2 + \operatorname{sen}(x-y) \Rightarrow$$

$$y' = \frac{6(2x+y)^2 + \operatorname{sen}(x-y)}{\operatorname{sen}(x-y) - 3(2x+y)^2}$$

5.3. APLICACIONES

5.3.1. Crecimiento y decrecimiento de funciones

Definición 21 *Decimos que una función f es:*

intervalo, x_1 *y* x_2

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

2. *decreciente en un intervalo* I *si, y sólo si, para dos números cualesquiera del intervalo,* x_1 *y* x_2

   $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Veamos como se traduce en términos de derivadas:

Teorema 12 *Sea* f *una función diferenciable en un intervalo abierto* I*.*

1. *Si* $f' > 0$ *para todo* x *en* I, $\Rightarrow$ f *es creciente en* I*.*
2. *Si* $f' < 0$ *para todo* x *en* I, $\Rightarrow$ f *es decreciente en* I*.*
3. *Si* $f' = 0$ *para todo* x *en* I, $\Rightarrow$ f *es constante en* I*.*

5.3.2. Cálculo de máximos y mínimos

En muchos problemas de ingeniería, física o economía es importante determinar cuán grande o cuán pequeña puede llegar a ser una determinada magnitud. Si el problema admite una formulación matemática, a menudo se reduce a calcular los máximos y mínimos de una función.

Definición 22 *Sea* f *una función diferenciable en un intervalo abierto* I*.*

1. *Diremos que* f *tiene un máximo local en* c *si, y sólo si,* $f(c) \geq f(x)$ *para todo* x *cercano a* c*.*
2. *Diremos que* f *tiene un mínimo local en* c *si, y sólo si,* $f(c) \leq f(x)$ *para todo* x *cercano a* c*.*

Los máximos y mínimos locales de f *se llaman* extremos locales.

Para calcularlos utilizamos las derivadas.

Teorema 13 *Sea* f *una función diferenciable en un intervalo abierto* I*. Si* f *tiene un máximo o un mínimo local en* $c \in I$ *entonces*

$$f'(c) = 0 \text{ o } f'(c) \text{ no existe.}$$

Definición 23 *Dada una función* f*. Los puntos* c *donde*

$$f'(c) = 0 \text{ o } f'(c) \text{ no existe}$$

se llaman puntos críticos *de* f*.*

Veamos cómo clasificar estos puntos mediante derivadas.

Teorema 14 (Criterio de la derivada primera) *Sea* c *un punto crítico de* f *y* f *es continua en* c*. Si existe un número positivo* δ *tal que*

1. *$f'(x) > 0$ para todo $x \in (c-\delta, c)$ y $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c, c+\delta)$, entonces $f(c)$ es un máximo local de f.*

2. *$f'(x) < 0$ para todo $x \in (c-\delta, c)$ y $f'(x) > 0$ para todo $x \in (c, c+\delta)$, entonces $f(c)$ es un mínimo local de f.*

3. *$f'(x)$ tiene el mismo signo para todo $x \in (c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)$, entonces $f(c)$ NO es un extremo local de f.*

Teorema 15 (Criterio de la derivada segunda) *Supongamos que $f'(c) = 0$ y que existe $f''(c)$, entonces*

1. *Si $f''(c) > 0$, entonces $f(c)$ es un mínimo local de f.*

2. *Si $f''(c) < 0$, entonces $f(c)$ es un máximo local de f.*

Definición 24 (Extremos absolutos) *Diremos que d es un máximo absoluto de f si, y sólo si,*

$$f(d) \geq f(x) \text{ para todo } x \text{ del dominio de } f.$$

Diremos que d es un mínimo absoluto de f si, y sólo si,

$$f(d) \leq f(x) \text{ para todo } x \text{ del dominio de } f.$$

Teorema 16 (de los valores extremos) *Dada una función f continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces*

1. *f está acotada en $[a, b]$, y*

2. *f alcanza su valor máximo (absoluto) M y su valor mínimo (absoluto) m en $[a, b]$.*

5.3.3. Concavidad y puntos de inflexión

Definición 25 *Sea f una función diferenciable en un intervalo abierto I. Se dice que su gráfica es:*

1. *cóncava si, y sólo si, f' es creciente en I.*

2. *convexa si, y sólo si, f' es decreciente en I.*

3. *tiene un punto de inflexión en $c \in I$ si existe un número positivo δ tal que la gráfica es cóncava en $(c-\delta, c)$ y convexa $(c, c+\delta)$, o viceversa.*

Teorema 17 *Sea f una función dos veces diferenciable en un intervalo abierto I.*

1. *Si $f''(x) > 0$ para todo x de I, entonces f' es creciente en I y la función es cóncava en I.*

2. *Si $f''(x) < 0$ para todo x de I, entonces f' es decreciente en I y la función es convexa en I.*

3. *Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión, entonces*

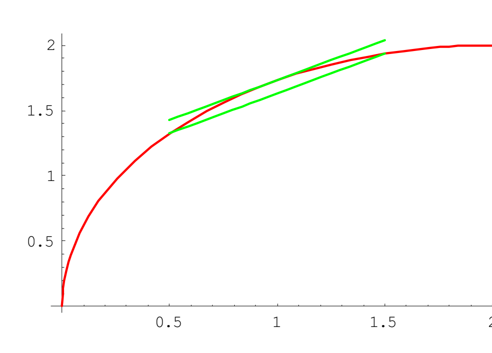
$$f''(c) = 0 \text{ o } f''(c) \text{ no existe.}$$

5.3.4. Teorema del valor medio

El teorema del valor medio fue enunciado por primera vez por el matemático francés Joseph Louis Lagrange (1736-1813); actualmente está presente en toda la estructura teórica del cálculo.

Teorema 18 (del valor medio) *Si f es diferenciable en el intervalo (a, b) y continua en $[a, b]$, existe al menos un número $c \in (a, b)$ para el que se verifica*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Obsérvese que el número $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$.

Por tanto el teorema del valor medio nos dice que existe al menos un punto $C(c, f(c))$, en el que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ es paralela a la recta secante que pasa por los puntos AB.

5.3.5. Trazado de curvas

Veremos ahora cómo dibujar curvas algo complicadas sin necesidad de ir marcando un punto tras otro. Para ello recopilaremos la información que podemos obtener de lo visto hasta ahora. Veamos el procedimiento a seguir:

1. Dominio de la función f : determinar el dominio; determinar las asíntotas verticales; estudiar el comportamiento de f cuando $x \to \pm\infty$; hallar las asíntotas horizontales.

2. Calcular los puntos de intersección con los ejes coordenados.

3. Estudiar la simetría y periodicidad de la función.

4. Calcular f'. Determinar los puntos críticos y estudiar si son máximos o mínimos. Estudiar f' para ver si la función es creciente o decreciente.

5. Calcular f''. Determinar los puntos de inflexión. Estudiar f'' para ver si la función es cóncava o convexa.

6. Dibujar los puntos de interés en un bosquejo preliminar: puntos de intersección, puntos extremos (máximos y mínimos) y puntos de inflexión.

7. Dibujar las asíntotas.

8. Finalmente, dibujar la gráfica uniendo los puntos de nuestro dibujo preliminar, teniendo el cuenta toda la información recopilada anteriormente para garantizar que la curva es dibujada de la manera apropiada.

Estudiemos algunos ejemplos representativos de funciones.

Ejemplo 5.5 *Dibujar la gráfica de la función* $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + \frac{7}{4}$.

Solución. Aplicaremos los distintos pasos:

1. La función $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + \frac{7}{4}$ es un polinomio, su dominio son todos los reales $\mathbf{R}$, $\operatorname{dom} f = \mathbf{R}$. No tiene asíntotas. Veamos su comportamiento en el infinito:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + \frac{7}{4}\right) = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{4}\left(x^4 - 2x^2 + \frac{7}{4}\right) = \infty.$$

2. Puntos de corte. $x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{7}{4} \Rightarrow \left(0, \frac{7}{4}\right)$.

3. $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + \frac{7}{4} \Rightarrow \left(x^2 = z\right) \Rightarrow 0 = \frac{1}{4}z^2 - 2z + \frac{7}{4}, \Rightarrow$
$z = 1, 7 \Rightarrow x^2 = 1, 7 \Rightarrow x = \pm 1, \pm\sqrt{7} \Rightarrow$
$\left(-\sqrt{7}, 0\right), (-1, 0), (1, 0) \left(\sqrt{7}, 0\right)$

4. Simetrías: $f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - 2(-x)^2 + \frac{7}{4} = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + \frac{7}{4} = f(x)$, es simétrica respecto del eje vertical.

   No es periódica al no ser trigonométrica.

5. Estudio de la derivada primera: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + \frac{7}{4} \Rightarrow f'(x) = x^3 - 4x$,
$f'(x) = x^3 - 4x = x\left(x^2 - 4\right) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 2$, puntos críticos de la derivada. Veamos su signo:

   Si $x < -2 \Rightarrow \left(x^2 - 4\right) > 0$ y $x < 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 4\right) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

   Si $-2 < x < 0 \Rightarrow \left(x^2 - 4\right) < 0$ y $x < 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 4\right) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ $f(x)$ es creciente.

   Si $0 < x < 2 \Rightarrow \left(x^2 - 4\right) < 0$ y $x > 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 4\right) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

   Si $x > 2 \Rightarrow \left(x^2 - 4\right) > 0$ y $x > 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 4\right) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

   Por tanto, los puntos $x = -2$ y $x = 2$ son mínimos, ya que la función pasa de decreciente a creciente; $x = 0$ es un máximo ya que pasa de creciente a decreciente.

6. Estudio de la derivada segunda: $f'(x) = x^3 - 4x \Rightarrow f''(x) = 3x^2 - 4$

   puntos de inflexión $f''(x) = 0 = 3x^2 - 4 \Rightarrow x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$,

   Si $x < -\dfrac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow f''(x) < 0$ por lo que $f(x)$ es cóncava, si $-\dfrac{2}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ $f''(x) > 0$ por lo que $f(x)$ es convexa; si $x > \dfrac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow f''(x) < 0$ por lo que $f(x)$ es cóncava.

   Comprobemos los máximos y mínimos utilizando el criterio de la derivada segunda:

   $f''(0) = -4 \Rightarrow x = 0$ es un máximo.

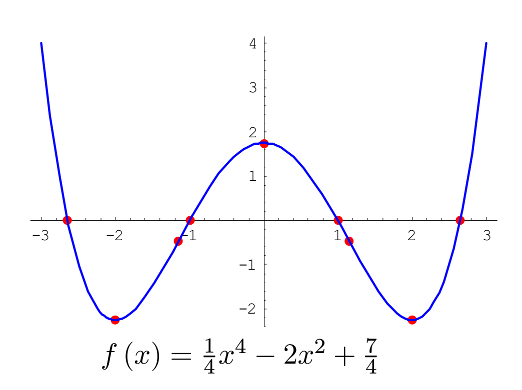
   $f''(-2) = 8 \Rightarrow x = -2$ es un mínimo.

   $f''(2) = 8 \Rightarrow x = 2$ es un mínimo; tal y como habíamos obtenido .

7. Calculemos los puntos más representativos en una tabla de valores:

x	0	$-\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	-1	1	-2	2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$f(x)$	$\frac{7}{4}$	0	0	0	0	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{17}{36}$	$-\frac{17}{36}$

8. Finalmente, dibujemos estos puntos y la función, teniendo en cuenta todo lo calculado hasta ahora.



$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + \frac{7}{4}$

Ejemplo 5.6 *Dibujar la gráfica de la función* $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3}$.

Solución. Aplicaremos los distintos pasos:

1. Dado que es una función racional, su dominio serán todos los reales menos los números que anulan el denominador, $x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$, luego $\operatorname{dom} f = \mathbf{R} - \{0\}$.

   Este valor coincide con las asíntotas verticales:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-4}{x^3} = \frac{-4}{0} = \infty \Rightarrow x = 0 \text{ es una asíntota vertical.}$$

   y estudiaremos los límites laterales para ver su comportamiento:

   $$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-4}{x^3} = \frac{-}{-} = \infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-4}{x^3} = \frac{-}{+} = -\infty$$

   Veamos el comportamiento de la función en el infinito

   $$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-4}{x^3} = \frac{+}{-} = 0, \qquad \lim_{x\to \infty} \frac{x^2-4}{x^3} = \frac{+}{+} = 0$$

   Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$, para ∞ y $-\infty$.

2. Puntos de corte. $x = 0 \Rightarrow$ No existe, hay una asíntota vertical.

   $y = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2-4}{x^3} = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow (-2, 0), (2, 0)$

3. Simetrías: $f(-x) = \dfrac{(-x)^2-4}{(-x)^3} = \dfrac{x^2-4}{-x^3} = -\dfrac{x^2-4}{x^3} = -f(x)$.

   Es simétrica respecto del origen.

   No es peródica al no ser trigonométrica.

4. Estudio de la derivada primera:

   $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{x^2-12}{x^4} \Rightarrow$

   Puntos críticos $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$.

   $f''\left(-2\sqrt{3}\right) = \dfrac{1}{36}\sqrt{3} > 0 \Rightarrow x = -2\sqrt{3}$ es un mínimo;

   $f''\left(2\sqrt{3}\right) = -\dfrac{1}{36}\sqrt{3} < 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$ es un máximo.

   $x < -2\sqrt{3},\ f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decreciente;

   $-2\sqrt{3} < x < 0,\ f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ creciente;

   $0 < x < 2\sqrt{3},\ f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ creciente;

   $x > 2\sqrt{3},\ f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decreciente.

5. Estudio de la derivada segunda: $f''(x) = 2\dfrac{x^2-24}{x^5}$,

   $f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 24 = 0 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{6}$ puntos de inflexión.

   $x < -2\sqrt{6},\ f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ convexa;

   $-2\sqrt{6} < x < 0,\ f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ cóncava;

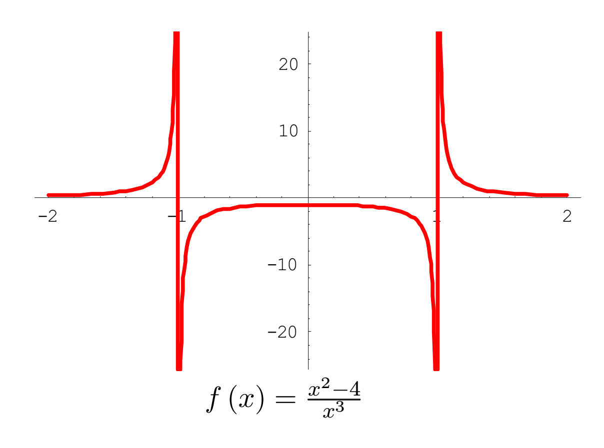
   $0 < x < 2\sqrt{6},\ f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ convexa;

   $x > 2\sqrt{6},\ f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ cóncava.

6. Calculemos los puntos más representativos en una tabla de valores:

x	$-2\sqrt{6}$	$2\sqrt{6}$	$-2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	-2	2
$f(x)$	$-\frac{5}{72}\sqrt{6}$	$\frac{5}{72}\sqrt{6}$	$-\frac{1}{9}\sqrt{3}$	$\frac{1}{9}\sqrt{3}$	0	0

7. Finalmente, dibujemos estos puntos, las asíntotas y la función, teniendo en cuenta todo lo calculado hasta ahora.



$f(x) = \frac{x^2-4}{x^3}$

Ejemplo 5.7 *Dibujar la gráfica de la función* $f(x) = \operatorname{sen} 2x - 2\operatorname{sen} x$.

Solución. Aplicaremos los distintos pasos:

1. Dado que es una función trigonométrica y no tiene denominadores, su dominio serán todos los reales, luego dom $f = \mathbf{R}$. Puesto que la función seno es acotada, esta función también lo es. No tiene asíntotas.

2. Puntos de corte. $x = 0 \Rightarrow f(0) = \operatorname{sen} 0 - 2 \operatorname{sen} 0 = 0$,

   $f(x) = 0 = \operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{sen} x \Rightarrow$

   $2 \operatorname{sen} x \cos x - 2 \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x (\cos x - 1) = 0 \Rightarrow$

   $$\begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = \pm k\pi, \quad k = 0, 1, 2, ... \\ \cos x = 1 \Rightarrow x = \pm 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, ... \end{cases}$$

3. Estudiemos su simetría: $f(-x) = \operatorname{sen} 2(-x) - 2 \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} 2x + 2 \operatorname{sen} x = -f(x)$, es simétrica respecto del origen.

   Veamos su periodo: $f(x+T) = f(x) \Rightarrow \operatorname{sen} 2(x+T) - 2 \operatorname{sen}(x+T) = \operatorname{sen}(2x+2T) - \operatorname{sen}(x+T) = \operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x$, dado que la función seno es $2\pi-$periódica, $\operatorname{sen} 2x$ tiene periodo π y $\operatorname{sen} x$ tiene periodo 2π, por lo que el periodo es 2π.

4. Estudio de la derivada primera: $f(x) = \operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{sen} x \Rightarrow$

   $f'(x) = 2 \cos 2x - 2 \cos x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow$

   $2 \cos 2x - 2 \cos x = 2 \left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right) - 2 \cos x =$

   $= 2 \left(2 \cos^2 - 1\right) - 2 \cos x = 0 \Rightarrow$

   $$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = 1, -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

   $$\begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = \pm 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, ... \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{3} \pm 2k\pi, \quad \dfrac{4\pi}{3} \pm 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, ... \end{cases}$$

   Estudiemos la derivada segunda para ver donde estan los máximos y los mínimos, dado que la función es periódica, nos limitaremos al intervalo $(0, 2\pi)$

   $f''(x) = -4 \operatorname{sen} 2x + 2 \operatorname{sen} x \Rightarrow f''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}$, $x = \dfrac{2\pi}{3}$ es un mínimo;

   $f''\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -3\sqrt{3}$ $\quad x = \dfrac{4\pi}{3}$ es un máximo.

   $f''(0, 2\pi) = 0$, por lo que se han de estudiar las derivadas siguientes para ver el cáracter de los puntos $x = \pm 2k\pi$.

   $f'''(x) = -8 \cos 2x + 2 \cos x \Rightarrow f'''(0, 2\pi) = -6 \Rightarrow x = 0, 2\pi$ son puntos de inflexión.

   Dado que la función es continua, crece entre mínimo y máximo consecutivos y decrece entre máximo y mínimo consecutivos; es decir, en el intervalo $[0, 2\pi]$ es decreciente en $\left(0, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ y $\left(\dfrac{4\pi}{3}, 2\pi\right)$ y creciente en $\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right)$.

5. Puntos de inflexión: $f''(x) = 0$

   $-4 \operatorname{sen} 2x + 2 \operatorname{sen} x = -8 \operatorname{sen} x \cos x + 2 \operatorname{sen} x =$

   $= 2 \operatorname{sen} x (-4 \cos x + 1) = 0 \Rightarrow$

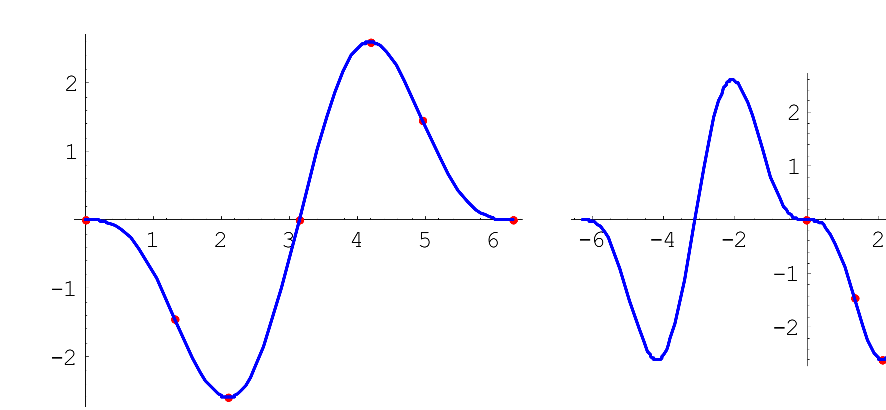
   $$\begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = \pm k\pi, \quad k = 0, 1, 2, ... \\ \cos x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x = \arccos \dfrac{1}{4} = \pm 1.3181 \pm 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, ... \end{cases}$$

La función es convexa en $(0, 1.3181)$ y $(\pi, 4.9651)$ y cóncava en $(4.9651, \pi)$ y $(4.9651, 2\pi)$.

6. Calculemos los puntos más representativos en una tabla de valores:

x	0	π	2π	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	-1.3181	1.3181
$f(x)$	0	0	0	$-\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	1.4523	-1.4523

7. Finalmente, dibujemos estos puntos y la función. Puesto que la función es periódica, se puede repetir lo obtenido en un periodo para ver la función completa.



$f(x) = \operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{sen} x$

TEMA 6

DERIVADAS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Recordemos que una función de dos variables no es más que una regla f que asigna un número real $f(x, y)$ a cada punto (x, y) de D, siendo D un conjunto no vacío del plano xy. O del espacio, si la función es de tres variables $f(x, y, z)$.

6.1. DERIVADAS PARCIALES: DEFINICIÓN E INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Las derivadas parciales son las obtenidas al mantener constantes en una función todas las variables independiente excepto una, y derivar respecto de ésta. Las derivadas parciales también se definen a partir de límites e implican que la función debe ser continua en el punto donde se deriva, pero dada la dificultad de calcular límites de funciones de más de una variable, nos limitaremos a trabajar con funciones continuas y usaremos las reglas de derivación para su cálculo.[1] Las notaciones habituales son, para una función $z = f(x, y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

Ejemplo 6.1 *Calcular las derivadas parciales respecto de x e y, de la función*

$$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$$

Solución. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x = -2x, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_y = -2y.$

Ejemplo 6.2 *Calcular las derivadas parciales respecto de x e y, de la función*

$$f(x, y) = e^x \ln\left(x^2 + y^2 + 1\right)$$

Solución. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x = e^x \ln\left(x^2 + y^2 + 1\right) + \dfrac{2xe^x}{x^2 + y^2 + 1}.$
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = f_y = \dfrac{2ye^x}{x^2 + y^2 + 1}.$

El procedimiento es el mismo para funciones de tres o más variables, por ejemplo.

Ejemplo 6.3 *Calcular las derivadas parciales respecto de x, y, z, de la función*

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz$$

[1] Se puede encontrar una definición precisa de las derivadas parciales en cualquier libro de cálculo de varias variables. Véase el libro de R. I. Larson, R. P. Hostetler, B. H. Edwards, *Cálculo y geometría analítica*, McGraw-Hill (1989), por ejemplo.

Solución. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x = y + z, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_y = x + z, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial z} = f_z = x + y.$

Ejemplo 6.4 *Calcular las derivadas parciales respecto de* x, y, z, *de la función*

$$f(x, y, z) = 1 + y^2 + 2z^2$$

Solución. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x = 0, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_y = 2y, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial z} = f_z = 4z.$

La interpretación geométrica de las derivadas parciales de funciones de dos variables es análoga a la de una variable. La función $z = f(x, y)$ representa un superficie en el espacio, y una curva es la intersección de dos superficies.

Por tanto, la derivada parcial de f respecto de x en el punto (x_0, y_0), $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$, proporciona la pendiente de la recta tangente a la curva, definida por la superficie $z = f(x, y)$ y el plano $y = y_0$, en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Asimismo, la derivada parcial de f respecto de y en el punto (x_0, y_0), $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$, proporciona la pendiente de la recta tangente a la curva, definida por la superficie $z = f(x, y)$ y el plano $x = x_0$, en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Ejemplo 6.5 *Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la gráfica de la función* $f(x, y) = 10 - x^2 - y^2$ *y el plano* $y = 2$, *en el punto* $(2, 2, 2)$.

Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la gráfica de la función $f(x, y) = 10 - x^2 - y^2$ *y el plano* $x = 2$, *en el punto* $(2, 2, 2)$.

Solución. Recuérdese que una curva en el espacio viene dada por dos ecuaciones ya que corresponde a la intersección de dos superficies.

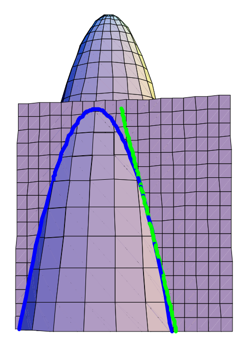
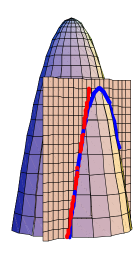
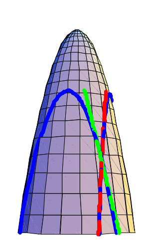
La intersección del plano $y = 2$ y de la superficie $z = 10 - x^2 - y^2$ se obtiene una parábola, de ecuación $z = 6 - x^2$, la ecuación de la recta tangente a esta parábola sera:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = -2x \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,2)} = -4 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = 2 \\ z - 2 = -4(x - 2) \end{array} \right. .$$

Analogamente, en el plano $x = 2$ está la parábola de ecuación $z = 6 - y^2$, la recta tangente será:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = -2y \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,2)} = -4 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 2 \\ z - 2 = -4(y - 2) \end{array} \right. .$$

Estas rectas, tangentes a la superficie, se ven en el siguiente dibujo:

6.1.1. Regla de la cadena

Para derivar una función que depende de variables que, a su vez, dependen de otras, se ha de aplicar la regla de la cadena.

Ejemplo 6.6 *Sea* $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x$ *y sea* $x = 2\cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$. *Calcular la derivada de la función* f *respecto de* t.

Solución. Una forma de calcularla es sustituyendo las variables y despues derivando:

$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x = (2\cos t)^2 + (2\operatorname{sen} t)^2 + 2(2\cos t) = 4 + 4\cos t \Rightarrow$
$\dfrac{df}{dt} = -4\operatorname{sen} t.$

Pero, a veces, no es tan sencillo sustituir las funciones, por lo que recurrimos a la **regla de la cadena:**

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (2x+2)(-2\operatorname{sen} t) + (2y)(2\cos t) =$$
$$= (4\cos t + 2)(-2\operatorname{sen} t) + (4\operatorname{sen} t)(2\cos t) =$$
$$= -8\operatorname{sen} t\cos t - 4\operatorname{sen} t + 8\operatorname{sen} t\cos t = -4\operatorname{sen} t.$$

Ejemplo 6.7 *Sea* $f(x,y) = \arctan \dfrac{x}{y}y$ *sea* $x = 3\cos t$, $y = 3\operatorname{sen} t$. *Calcular la derivada de la función* f *respecto de* t.

Solución. $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}(-3\operatorname{sen} t) + \dfrac{\frac{-x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}(3\cos t) =$

$$= \frac{\frac{1}{3\operatorname{sen} t}}{1+\left(\frac{3\cos t}{3\operatorname{sen} t}\right)^2}(-3\operatorname{sen} t) + \frac{\frac{-3\cos t}{(3\operatorname{sen} t)^2}}{1+\left(\frac{3\cos t}{3\operatorname{sen} t}\right)^2}(3\cos t) = \frac{-1-\frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}}{1+\left(\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}\right)^2} = -1.$$

Si se sustituye se obtiene $f(t) = f(x(t), y(t)) = \arctan \dfrac{x}{y} = \arctan \dfrac{3\cos t}{3\operatorname{sen} t} =$

$= \arctan\cot t = \arctan\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \dfrac{\pi}{2} - t \Rightarrow f'(t) = -1.$

6.2. DERIVADAS DIRECCIONALES. VECTOR GRADIENTE

En la sección anterior hemos visto que si la función representa una superficie y P es un punto de dicha superficie, las derivadas parciales en P representan las pendientes de las rectas tangentes a la superficie en P que son paralelas a los planos xz e yz. Pero en el espacio hay infinitas direcciones; por tanto, para obtener la pendiente de una tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en un punto, hay que especificar la dirección en que se quiere medir. Vamos a calcular en esta sección derivadas en otras direcciones, llamadas *derivadas direccionales*, que se expresan en términos de un vector llamado **gradiente**.

Definición 26 *Sea* f *una función de dos variables y* $\vec{u} = (u_1, u_2)$, *un vector unitario. La* derivada direccional *de* f *en* $P(x_0, y_0)$ *en la dirección de* $\vec{u}$ *es:*

$$D_{\vec{u}}f(x_0,y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} u_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} u_2 = \vec{\nabla} f(x_0,y_0)\cdot\vec{u}$$

La derivada direccional se puede expresar de forma concisa en términos de una función vectorial llamada **gradiente.** El gradiente es un vector en el plano xy. Este vector apunta al sentido de máximo ascenso en el punto dado, es decir, la función crece más rápidamente en el sentido de su gradiente y decrece más rápidamente en el sentido contrario. Además, $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ es perpendicular a la curva de nivel $f(x, y) = c$ que pasa por el punto $P(x_0, y_0)$.

En general, se define el vector gradiente como:

Definición 27 *Sea f una función que admite derivadas parciales respecto de todas las variables. Entonces, el* gradiente *es la función vectorial definida por*

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

en el caso de una función de dos variables.

Si f tiene n componentes, el vector gradiente se define como

$$\vec{\nabla} f(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Como antes, en el punto P, la función crece más rápidamente en el sentido del gradiente y decrece más rápidamente en el opuesto.

Ejemplo 6.8 *La temperatura en cada punto de una hoja de metal viene dada por la función $T(x, y) = e^x \cos y + e^y \cos x$.*

1. *¿Qué vale la temperatura en el origen? ¿Y en el punto (π, π)?*
2. *¿En qué dirección crece más rápidamente a partir del origen? ¿Cuál es la tasa de incremento?*
3. *¿En qué dirección decrece más rápidamente a partir del origen? ¿Cuál es la tasa?*

Solución. $T(0, 0) = 1$, $T(\pi, \pi) = -2e^{\pi} = -46.281$
$\vec{\nabla} f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (e^x \cos y - e^y \operatorname{sen} x, -e^x \operatorname{sen} y + e^y \cos x)$

$\vec{\nabla} f(0, 0) = (1, 1)$. La dirección de máximo crecimiento a partir del origen es la dada por el vector $(1, 1)$. La de máximo decrecimiento es la dada por el vector $(-1, -1)$. La tasas de crecimiento o decrecimiento se calculan a partir del modulo de dichos vectores, serán $\pm\sqrt{2}$, respectivamente.

$\vec{\nabla} f(\pi, \pi) = (-e^{\pi}, -e^{\pi}) \simeq (-23.141, -23.141)$

Ejemplo 6.9 *La temperatura en cada punto de una hoja de metal viene dada por la función $T(x, y) = 1 + x^2 - y^2$. Hallar la trayectoria de una partícula que busca el calor y que está en en el punto $(-2, 1)$.*

Solución. $T(-2, 1) = 4$.

La partícula se mueve en el sentido del vector gradiente

$\vec{\nabla} f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x, -2y)$.

Queremos la ecuación de la curva:

$C : \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, sabiendo que sale del punto $(-2, 1)$ y que en cada punto es tangente al vector gradiente, es decir, considerando que la curva está parametrizada, la derivada respecto de ese parámetro coincide en cada punto con el vector gradiente, por tanto:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}\right) = \vec{\nabla} f(x, y) = (2x, -2y) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = 2x \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -2y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx(t)}{x} = 2dt \\ \dfrac{dy(t)}{y} = -2dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln x = 2t + C_1 \\ \ln y = -2t + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \pm e^{(2t+C_1)} \\ y(t) = \pm e^{(-2t+C_2)} \end{cases}.$$

Se pueden calcular las constantes de integración ya que sabemos que la partícula sale del punto $(-2, 1)$, es decir, si $t = 0$ entonces $x(0) = -2$ e $y(0) = 1$.

$$\begin{cases} x(0) = \pm e^{(C_1)} = -2 \Rightarrow e^{(C_1)} = 2 \\ y(0) = \pm e^{(C_2)} = 1 \Rightarrow e^{(C_2)} = 1 \end{cases}.$$

Por tanto,

$$x(t) = -2e^{2t}, \qquad y(t) = e^{-2t}$$

O, lo que es lo mismo

$$y = \frac{-2}{x}$$

que es la ecuación de una hipérbola.

Teorema 19 (Propiedades del gradiente) *Sean f y g funciones que admiten derivadas parciales respecto de todas las variables. Entonces se verifica:*

regla de la constante $\vec{\nabla} c = \vec{0}$ *para toda constante c.*

linealidad $\vec{\nabla}(af + bg) = a\vec{\nabla} f + b\vec{\nabla} g$ *siendo a, b constantes.*

regla del producto $\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla} g + g\vec{\nabla} f$.

regla del cociente $\vec{\nabla}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\vec{\nabla} f - f\vec{\nabla} g}{g^2}, \quad g \neq 0.$

regla de la potencia $\vec{\nabla}(f^n) = nf^{n-1}\vec{\nabla} f$.

Ejemplo 6.10 *Calcular el gradiente de la función $f(x, y, z) = x^2 + 3xy + y^2 + 3xz^2$.*

Solución. $\vec{\nabla} f(x, y, z) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(2x + 3y + 3z^2, 3x + 2y, 6xz\right) =$

$$= \left(2x + 3y + 3z^2\right)\vec{i} + (3x + 2y)\vec{j} + 6xz\vec{k}.$$

Además, de forma análoga a lo que ocurre en dos dimensiones, si la función $f(x, y, z)$ es continua y diferenciable en cada punto del espacio, el vector gradiente $\vec{\nabla} f(x, y, z)$, si es distinto de cero en un punto, es ortogonal a la superficie de nivel que pasa por ese punto. Esto nos permite calcular la ecuación del plano tangente a una superficie en un punto.

El plano tangente a una superficie $f(x, y, z) = c$ en el punto de vector radial $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, es el plano que pasa por $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y tiene por vector perpendicular

al vector $\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0)$. Por tanto, un punto de vector radial $\vec{r} = (x, y, z)$ pertenece al plano tangente a la superficie $f(x, y, z) = c$ en el punto (x_0, y_0, z_0) si y sólo si

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

Ejemplo 6.11 *Calcular el plano tangente a la función* $f(x, y, z) = x^2 + 3xy + y^2 + 3xz^2$ *en el punto* $P_0(1, 1, 1)$.

Solución. $\vec{\nabla} f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) =$

$= \left(2x + 3y + 3z^2, 3x + 2y, 6xz\right) = (8, 5, 6)$.

La ecuación del plano tangente será:

$\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \Rightarrow (8, 5, 6) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) =$

$= 8(x - 1) + 5(y - 1) + 6(z - 1)$

$\Rightarrow 8x + 5y + 6z - 19 = 0.$

6.2.1. Matriz jacobiana

En el caso de que estemos trabajando con funciones vectoriales de varias variables, las derivadas parciales de una función $\vec{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)$ consisten en derivar todas sus componentes respecto a cada una de las variables, esta notación implica la necesidad de expresar estas derivadas como matriz, la matriz se conoce como **matriz jacobiana**.

Definición 28 *Sea* $\vec{f} : D \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *y* D *un abierto,* $\vec{f} = (f_1, f_2, ..., f_m)$ *y sea* $\vec{a} \in D$. *Si cada una de las componentes* f_j $(j = 1, ..., m)$ *admite derivadas parciales respecto de* x_i $(i = 1, ..., n)$, *se define la matriz de derivadas parciales o matriz jacobiana como:*

$$\mathbf{J}_f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}_{m \times n} = \begin{pmatrix} \vec{\nabla} f_1(\vec{a}) \\ \vdots \\ \vec{\nabla} f_m(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6.1 *Encontrar la matriz jacobiana del cambio a coordenadas polares:*

$$\begin{array}{rccc} \vec{f}: & \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ & (r, \theta) & \to & (x, y) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) \end{array}$$

Solución. $\mathbf{J}_f = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$.

Estas matrices son necesarias cuando se hace un cambio de coordenadas para integrar funciones de varias variables.

6.3. DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Como se ha comentado, las funciones deben ser continuas para poder calcular sus derivadas parciales, si también éstas son continuas se pueden calcular las derivadas parciales de segundo orden, etc. Como en el caso de una variable, al calcular la

segunda derivada, lo que se hace es derivar la primera; pero ahora hemos de tener en cuenta que existen varias variables y hay más posibilidades aunque, al igual que antes, al calcular la derivada respecto de una variable, las demás se consideran constantes.

Así, por ejemplo, si tenemos una función que depende de dos variables $f(x, y)$ y se pueden calcular sus derivadas parciales primeras con respecto a x, $\frac{\partial f}{\partial x}$,y con respecto a y, $\frac{\partial f}{\partial y}$. Las derivadas segundas serán:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

consideraremos que se cumple

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Ejemplo 6.12 *Calcular las derivadas parciales segundas de la función*

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2.$$

Solución. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y$, $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 2y,$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

Lo mismo para funciones de tres variables.

Ejemplo 6.13 *Calcular las derivadas parciales segundas de la función*

$$f(x, y, z) = x^2 + e^y \operatorname{sen} z.$$

Solución. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^y \operatorname{sen} z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = e^y \cos z,$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^y \operatorname{sen} z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -e^y \operatorname{sen} z,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = e^y \cos z$$

6.4. APLICACIONES: CÁLCULO DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Al igual que en el caso de funciones de una variable, usaremos las derivadas para calcular los máximos y mínimos locales de las funciones.

Definición 29 *Sea f una función de varias variables y $\vec{r}_0$ el vector radial de un punto interior de su dominio.*

- *Diremos que f tiene un máximo local en $\vec{r}_0$ si, y sólo si,*

$$f(\vec{r}) \leq f(\vec{r}_0) \quad \text{en un entorno de } \vec{r}_0.$$

- *Diremos que f tiene un mínimo local en $\vec{r}_0$ si, y sólo si,*

$$f(\vec{r}) \geq f(\vec{r}_0) \quad \text{en un entorno de } \vec{r}_0.$$

Y usaremos el gradiente para calcularlos.

Teorema 20 *Si f tiene un extremo local en $\vec{r}_0$, entonces se cumple*

$$o \qquad \vec{\nabla}(\vec{r}_0) = \vec{0} \quad o \qquad \vec{\nabla}(\vec{r}_0) \quad \text{no existe.}$$

Ejemplo 6.14 *Calcular los puntos críticos de la función*

$$f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 - 7y.$$

Solución. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x - y\ , \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y - 7.$

Los puntos críticos serán aquellos que satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 4x - y = 0 \\ -x + 2y - 7 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 4, x = 1.$$

6.4.1. Clasificación de puntos críticos. Criterio de la derivada segunda

Una vez calculados los puntos críticos, interesa clasificarlos, para ello recurrimos a las derivadas parciales segundas, ya que es una función de varias variables.

Teorema 21 *Si $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = (0,0)$ y $f(x,y)$ tiene derivadas parciales de segundo orden continuas en un entorno del punto crítico (x_0, y_0), se calcula el determinante de la matriz formada por las derivadas segundas, la matriz Hessiana:*

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

1. *Si $\det H < 0$ entonces (x_0, y_0) es un punto silla.*

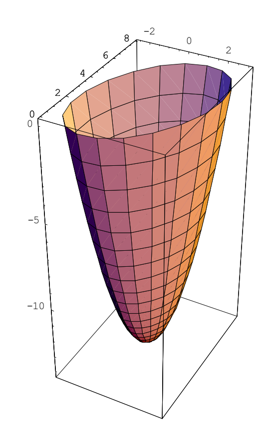
2. *Si $\det H > 0$ entonces (x_0, y_0) es un mínimo local si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ o un máximo local si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$*

$$o \qquad \vec{\nabla} f(\vec{r}_0) = \vec{0} \quad o \qquad \vec{\nabla} f(\vec{r}_0) \quad \text{no existe.}$$

Ejemplo 6.15 *Clasificar los puntos críticos de la función*

$$f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 - 7y.$$

Solución. La función $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 - 7y$ es el parabolide de la figura, se oberva que tiene un mínimo en el punto $(1, 4, -14)$. Vamos a comprobarlo.



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}=4x-y=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=-x+2y-7=0\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{c} y=4, x=1\Rightarrow\\ z=f(1,4)=-14\end{array}$$

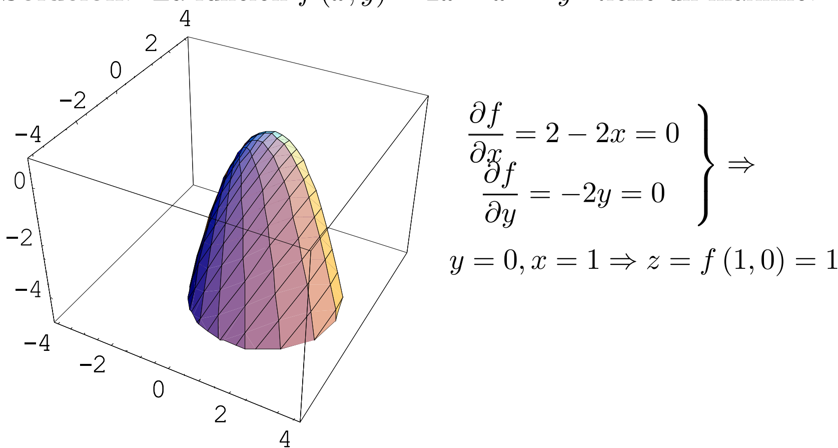
Hay un punto crítico $(1,4,-14)$. Calculamos las derivadas segundas
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\Rightarrow H=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\det H=9>0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4>0\Rightarrow(1,4,-14)$ es un mínimo.

Ejemplo 6.16 *Clasificar los puntos críticos de la función*

$$f(x,y)=2x-x^2-y^2.$$

Solución. La función $f(x,y)=2x-x^2-y^2$ tiene un máximo.



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2-2x=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=-2y=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$y=0, x=1\Rightarrow z=f(1,0)=1$

Hay un punto crítico $(1,0,1)$. Calculamos las derivadas segundas
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2\Rightarrow H=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\det H=4>0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2<0\Rightarrow(1,0,1)$ es un máximo.

6.4.2. Máximos y mínimos condicionados

Veamos cómo abordar el problema de maximizar o minimizar funciones sujetas a condiciones adicionales, conocidas como condiciones de ligadura.

Teorema 22 *Si una función* $f(\vec{x})$ *tiene un máximo o un mínimo en* $\vec{x}_0$*, sujeta a la condición de ligadura* $g(\vec{x})=0$*, entonces* $\vec{\nabla}f(\vec{x}_0)$ *y* $\vec{\nabla}g(\vec{x}_0)$ *son paralelos, por lo que si* $\vec{\nabla}g(\vec{x}_0)\neq\vec{0}$ *existe un escalar* λ *tal que:*

$$\vec{\nabla}f(\vec{x}_0)=\lambda\vec{\nabla}g(\vec{x}_0)$$

λ se conoce como *multiplicador de Lagrange.*

Ejemplo 6.17 *Maximizar y minimizar la función* $f(x,y) = xy$ *en la circunferencia unidad:* $x^2 + y^2 = 1$

Solución. Queremos maximizar y minimizar $f(x,y) = xy$ sujeta a la condición de ligadura $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Calculemos los gradientes:

$\vec{\nabla} f(x,y) = (y,x), \quad \vec{\nabla} g(x,y) = (2x, 2y).$

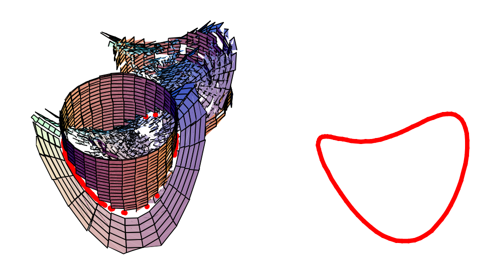
$\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = \lambda \vec{\nabla} g(\vec{x}_0) \Rightarrow (y,x) = \lambda(2x,2y).$ Por tanto, se han de satisfacer las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{dividiendo las dos primeras :} \frac{y}{x} = \frac{2\lambda x}{2\lambda y} \Rightarrow x^2 = y^2.$$

Sustituyendo en la última: $2y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Tenemos cuatro puntos posibles $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Veamos los valores que toma $f(x,y)$ en cada uno de ellos:

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-1}{2}, \quad f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-1}{2}, \quad f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}.$

Se observa que $\frac{1}{2}$ es el valor máximo y $\frac{-1}{2}$ el valor mínimo. Obsérvese que esos puntos son los puntos más altos y más bajos donde el cilidro corta al hiperboloide parabólico. Por tanto, los puntos $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ son máximos; y los puntos $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{2}\right)$y $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{2}\right)$ son mínimos.



Superfícies y curva intersección

III CÁLCULO INTEGRAL

TEMA 7

INTEGRACIÓN EN UNA VARIABLE

7.1. FUNCIONES PRIMITIVAS

Definición 30 *Sea $f(x)$ una función definida en $[a,b]$. Se llama función primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$ a cualquier función $F(x)$ definida en $[a,b]$ cuya función derivada coincida con $f(x)$ en $[a,b]$, es decir:*

$$F(x) \text{ primitiva de } f(x) \text{ en } [a,b] \Leftrightarrow F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Propiedad 3 *Si $G(x) = F(x)+C$ en $[a,b]$ entonces $G(x)$ también es una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$, ya que $G'(x) = F'(x)$, $\forall x \in [a,b]$.*

La función primitiva se escribe

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

7.1.1. Métodos del cálculo de primitivas.

Por descomposición

Se aplica cuando la función $f(x)$ puede descomponerse en suma de funciones que tengan primitiva inmediata

$$\int f(x)dx = \int (f_1(x) + f_2(x) + \ldots)\, dx$$

Ejemplo 7.1 $\displaystyle\int \tan^2 x dx = \int \left(1 + \tan^2 x - 1\right) dx = \int \left(1 + \tan^2 x\right) dx - \int dx =$

$= \tan x - x + C$

Ejemplo 7.2 $\displaystyle\int \frac{x-1}{x+1}dx = \int \frac{x+1-2}{x+1}dx = \int \frac{x+1}{x+1}dx - \int \frac{2}{x+1}dx =$

$= x - 2\log|x+1| + C$

Por partes

A partir de la regla de la derivada del producto de dos funciones:

$$d\left(u\left(x\right)v\left(x\right)\right) = u\left(x\right)dv\left(x\right) + v\left(x\right)du\left(x\right)$$

se obtiene la regla de integración por partes:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Ejemplo 7.3 $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x dx = \left\| \begin{array}{|ccc|} u = x & \Rightarrow & du = dx \\ \operatorname{sen} x dx = dv & \Rightarrow & v = \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x \end{array} \right\| =$
$\displaystyle= -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$

Ejemplo 7.4 $\displaystyle\int xe^x dx = \left\| \begin{array}{|ccc|} u = x & \Rightarrow & du = dx \\ e^x dx = dv & \Rightarrow & v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\| =$
$\displaystyle= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

Por cambio de variable o sustitución

Se hace el cambio $x = g(t)$, $dx = g'(t)dt$ y se sustituye en la integral

$$\int f(g(t))dx = \int f(x)g'(t)dt$$

volviendo a deshacer el cambio una vez encontrada la primitiva.

Ejemplo 7.5 $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}dx = \left\| \begin{array}{|c|} x = \cos t \\ dx = -\operatorname{sen} t dt \end{array} \right\| = \int \sqrt{1-\cos^2 t}(-\operatorname{sen} t)dt =$
$\displaystyle= \int -\operatorname{sen}^2 t dt = -\int \frac{1-\cos 2t}{2}dt = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t + C =$
$= -\frac{1}{2}\arccos x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$

Ejemplo 7.6 $\displaystyle\int x^2\sqrt{2+x}dx = \left\| \begin{array}{|c|} x+2 = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array} \right\| = \int \left(t^2-2\right)2t^2 dt =$
$\displaystyle= \int \left(2t^6 - 8t^4 + 8t^2\right)dt = \frac{2}{7}t^7 - \frac{8}{5}t^5 + \frac{8}{3}t^3 + C =$
$= \frac{2}{7}\sqrt{(x+2)^7} - \frac{8}{5}\sqrt{(x+2)^5} + \frac{8}{3}\sqrt{(x+2)^3} + C$

Primitivas de funciones racionales

Para calcular la primitiva de $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ consideraremos que el grado del polinomio $P(x)$ es estrictamente menor que el de $Q(x)$, si no es así, dividiremos. Veremos los diguientes casos:

- $Q(x) = 0$ tiene sólo raíces reales simples.

- $Q(x) = 0$ tiene raíces reales múltiples.
- $Q(x) = 0$ tiene raíces complejas simples.

Estos casos se resuelven descomponiendo la fracción en fracciones simples.

Ejemplo 7.7 $\displaystyle\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}dx = \int \frac{2}{x+1}dx + \int \frac{3}{x-2}dx =$

$= 2\log|x+1| + 3\log|x-2| + C$

$$\frac{5x-1}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} \Rightarrow A = 2, \quad B = 3$$

Ejemplo 7.8 $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2(x-1)}dx = \int \frac{\frac{-1}{4}}{x+1}dx + \int \frac{\frac{-1}{2}}{(x+1)^2}dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{x-1}dx =$

$\displaystyle= \frac{-1}{4}\log|x+1| - \frac{1}{2}\frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \frac{1}{4}\log|x-1| + C$

$$\frac{1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1} \Rightarrow A = \frac{-1}{4}, \quad B = \frac{-1}{2}, \quad C = \frac{1}{4}.$$

Ejemplo 7.9 $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+1}{(x^2+1)(x-1)}dx = \int \frac{\frac{-1}{2}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}}{x^2+1}dx =$

$\displaystyle= \frac{-1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{3}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx =$

$\displaystyle= -\frac{1}{2}\log|x-1| + \frac{3}{4}\log\left|x^2+1\right| - \frac{3}{2}\arctan x + C$

$$\frac{x^2-3x+1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow A = \frac{-1}{2}, \quad B = \frac{3}{2}, \quad C = -\frac{3}{2}.$$

Primitivas de funciones algebraicas irracionales

Las funciones algebraicas irracionales son aquellas en las que la variable x está sometida a las cuatro operaciones elementales y la radicación. Un método para calcular sus primitivas consiste en transformarlas en funciones racionales mediante un cambio de variable, cosa que no siempre es posible. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 7.10 $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}dx = \left\| \boxed{\begin{array}{c} x = t^{12} \\ dx = 12t^{11}dt \end{array}} \right\| = \int \frac{t^4}{t^4+t^3}12t^{11}dt =$

$\displaystyle= 12\int \frac{t^{12}}{t+1}dt = 12\int \left(t^{11} - t^{10} + t^9 - t^8 + t^7 - t^6 + t^5 - t^4 + t^3 - t^2 + t - 1\right)dt +$

$\displaystyle+12\int \frac{1}{t+1}dt = 12\left(\frac{t^{12}}{12} - \frac{t^{11}}{11} + \frac{t^{10}}{10} - \frac{t^9}{9} + \frac{t^8}{8} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^6}{6} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t\right) +$

$\displaystyle+\log|t+1| + C = 12(\frac{x}{12} - \frac{x^{\frac{11}{12}}}{11} + \frac{x^{\frac{10}{12}}}{10} - \frac{x^{\frac{9}{12}}}{9} + \frac{x^{\frac{8}{12}}}{8} - \frac{x^{\frac{7}{12}}}{7} + \frac{x^{\frac{6}{12}}}{6} - \frac{x^{\frac{5}{12}}}{5} +$

$\displaystyle+\frac{x^{\frac{4}{12}}}{4} - \frac{x^{\frac{3}{12}}}{3} + \frac{x^{\frac{2}{12}}}{2} - x^{\frac{1}{12}}) + \log\left|x^{\frac{1}{12}} + 1\right| + C$

Ejemplo 7.11 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \int \frac{2(1-t)}{-t^2+2t-2} \cdot \frac{-t^2+2t-2}{2(1-t)^2}dt =$
$= \int \frac{1}{1-t}dt = -\log|-t+1| + C = -\log\left|1-\sqrt{x^2+2x+2}+x\right| + C$

El cambio adecuado es sustituir la raíz por $x+t$ o $x-t$.

$\sqrt{x^2+2x+2} = x+t \Rightarrow x^2+2x+2 = (x+t)^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-2}{2-2t} \Rightarrow$

$dx = \frac{-t^2+2t-2}{2(1-t)^2}dt$

7.2. LA INTEGRAL DE RIEMANN. PROPIEDADES

Definición 31 *Se llama partición P del intervalo $[a,b]$ a un conjunto finito de puntos*
$P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ *tales que* $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

Dada una partición P de $[a,b]$ y una función $f(x)$ acotada en dicho intervalo se definen las sumas de Riemann como:

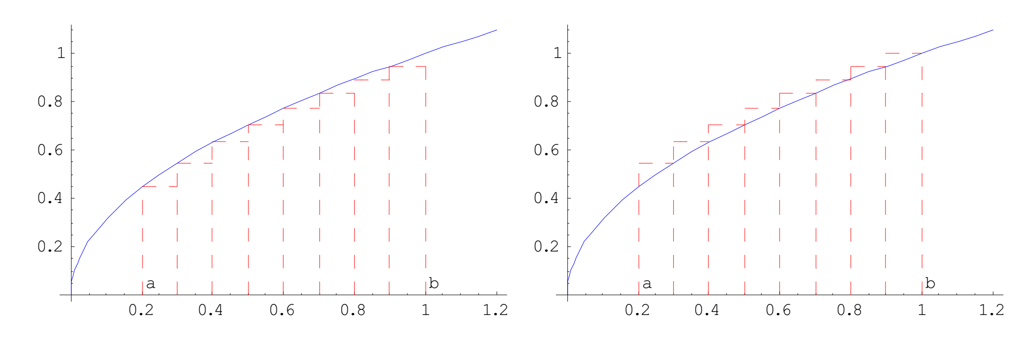
Definición 32 *La* suma inferior de Riemann *de $f(x)$ respecto de la partición P es el número real dado por*

$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} \left(\inf\{f(x), \quad x_{i-1} \le x \le x_i\}\right)(x_i - x_{i-1})$$

La suma superior de Riemann *de $f(x)$ respecto de la partición P es el número real dado por*

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup\{f(x), \quad x_{i-1} \le x \le x_i\}\right)(x_i - x_{i-1})$$

que se pueden ver en los siguientes dibujos



Las propiedades de las sumas de Riemann son:

1. $L(P,f) \le U(P,f)$ dado que en cualquier subconjunto de los reales el ínfimo siempre es menor o igual que el supremo.

2. Si $P \subset P' \Rightarrow \begin{cases} L(P,f) \leq L(P',f) \\ U(P',f) \leq U(P,f) \end{cases}$.

   Es decir, a medida que una partición es más fina las sumas superior e inferior se aproximan más al área bajo la curva.

3. Dadas dos particiones P y P' de $[a,b]$

$$m\,(b-a) \leq L(P,f) \leq U(P',f) \leq M\,(b-a)$$

   siendo m el mínimo de $f(x)$ en $[a,b]$ y M su máximo.

Definición 33 *Una función $f(x)$, definida en $[a,b]$ y acotada en dicho intervalo se dice que es* integrable Riemann *si dado un número real positivo ε existe una partición P tal que*

$$U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$$

y se define la integral como el límite de ambas sumas, es decir, cuando ambas sumas coinciden.

$$\int_a^b f\,(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f\,(x_i)\,\Delta x_i$$

La integral de Riemann se asimila con el cálculo de áreas de figuras planas. De hecho, si $f(x)$ es integrable Riemann y positiva en $[a,b]$ entonces $\int f\,(x)\,dx$ es el área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$. Si $f(x)$ es integrable Riemann en $[a,b]$ pero toma valores positivos y negativos en dicho intervalo, se debe cambiar el signo donde la función es definida negativa para calcular el área.

Teorema 23 *Toda función continua en $[a,b]$ es integrable Riemann en $[a,b]$.*

Teorema 24 *Si $f(x)$ tiene un número finito de puntos donde es discontinua en $[a,b]$, $f(x)$ es integrable Riemann en $[a,b]$.*

Propiedades

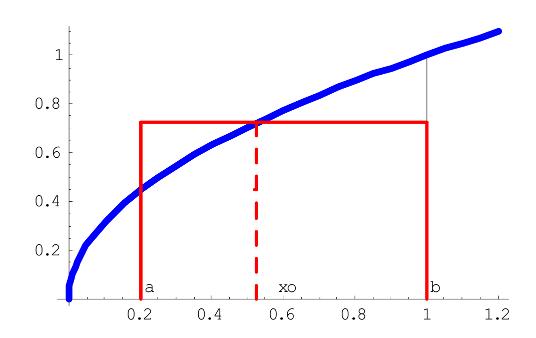
Propiedad 4 *Si $f(x)$ es integrable Riemann en $[a,b]$ y $c \in [a,b]$, entonces $f(x)$ es integrable Riemann en $[a,c]$ y $[c,b]$ y además*

$$\int_a^b f\,(x)\,dx = \int_a^c f\,(x)\,dx + \int_c^b f\,(x)\,dx$$

Propiedad 5 (Primer teorema de la media) *Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ existe un punto $x_0 \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b f\,(x)\,dx = f\,(x_0)\,(b-a)$$

Gráficamente este teorema afirma que el área bajo la curva en el intervalo $[a,b]$ coincide con el área del rectángulo de base $(b-a)$ y altura $f\,(x_0)$.



Definición 34 *Si $f(x)$ es integrable Riemann en $[a,b]$ es posible definir una aplicación A de $[a,b]$ en los reales tal que $\forall t \in [a,b]$*

$$A(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

que se conoce como función integral indefinida *de $f(x)$ en $[a,b]$.*

Teorema 25 *Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ su función integral indefinida es una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$.*

Teorema 26 (Regla de Barrow) *Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$ entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Prueba. $A(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$ por el teorema anterior. Si $F(x)$ es otra primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$ entonces debe diferir de $A(x)$ en una constante:

$$F(x) = A(x) + C$$

luego:

$F(a) = A(a) + C$

$F(b) = A(b) + C.$

Por definición,

$A(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$ ya que el área de una línea es cero. Por tanto, $F(a) = C$.

$A(b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - C = F(b) - F(a).$

Por tanto, para calcular la integral de Riemann de una función se busca una primitiva de dicha función. Si la integral es una integral definida, se aplica la regla de Barrow para calcularla.

Ejemplo 7.12 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}dx = [\arctan x]_1^{\sqrt{3}} = \arctan\sqrt{3} - \arctan 1 =$

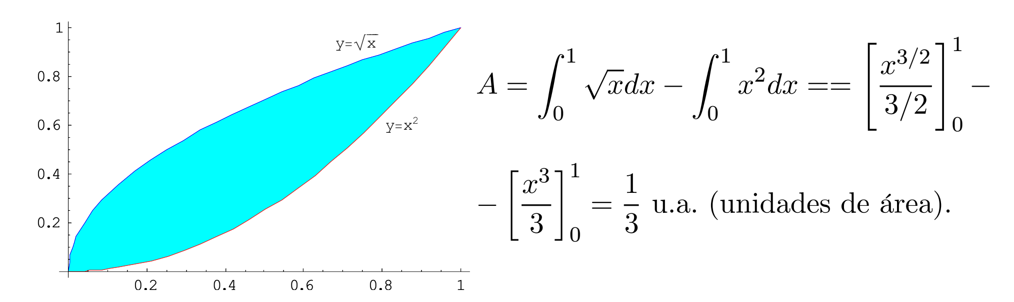
$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$

Ejemplo 7.13 $\displaystyle\int_3^5 \frac{1}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{-1}{x-1}dx + \int \frac{1}{x-2}dx = \left[-\log|x-1|\right]_3^5 +$

$+\left[\log|x-2|\right]_3^5 = \log 3 + \log 2 - \log 4 = \log\frac{3}{2}.$

Ejemplo 7.14 *Calcular el área limitada por las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$.*

Solución. Gráficamente, el área es la zona sombreada:



$$A = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2 dx == \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 - $$

$$-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \text{ u.a. (unidades de área).}$$

7.3. INTEGRALES IMPROPIAS

Se conocen como integrales impropias aquellas integrales que:

a) tienen alguno de sus límites de integración infinito, o

b) tienen un número finito de discontinuidades infinitas dentro del intervalo de integración.

Definición de integrales impropias con límites de integración infinitos.

i. Si f es continua en el intervalo $[a, \infty)$, entonces

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx$$

ii. Si f es continua en el intervalo $(-\infty, a]$, entonces

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^a f(x)\,dx$$

iii. Si f es continua en el intervalo $(-\infty, \infty)$, entonces

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx$$

donde c es cualquier número real.

Si el límite existe la integral impropia converge, de lo contrario diverge.

Definición de integrales impropias con una discontinuidad infinita.

i. Si f es continua en el intervalo $[a, b)$ y tiene una discontinuidad infinita en b, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{R\to b^-} \int_a^R f(x)\,dx$$

ii. Si f es continua en el intervalo $(a, b]$ y tiene una discontinuidad infinita en a, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{R \to a^+} \int_R^b f(x)\,dx$$

iii. Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ excepto en un c de (a, b) en el que tiene una discontinuidad infinita, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Al igual que antes, si el límite existe la integral impropia converge, de lo contrario diverge.

Ejemplo 7.15 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$

$$= \lim_{b\to 1^-} \left[\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int_0^b \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx\right] = \lim_{b\to 1^-} \left[\arcsin x - \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1/2}\right]_0^b =$$

$$= \frac{\pi}{2} + 1.$$

Ejemplo 7.16 $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}dx + \int_1^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}dx =$

$$= \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{1}{(x-1)^{2/3}}dx + \lim_{c\to 1^+} \int_c^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}dx =$$

$$= \lim_{b\to 1^-} \left[\frac{(x-1)^{1/3}}{1/3}\right]_0^b + \lim_{c\to 1^+} \left[\frac{(x-1)^{1/3}}{1/3}\right]_c^3 = 3 + 3\sqrt[3]{2}.$$

Ejemplo 7.17 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_1^b = e^{-1}.$

Ejemplo 7.18 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{b\to\infty} \left[\arctan x\right]_1^b =$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Ejemplo 7.19 $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^2-1}dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x^2-1}dx = \lim_{b\to\infty} [\int_2^b \frac{\frac{1}{2}}{x-1}dx -$

$$- \int_2^b \frac{\frac{1}{2}}{x+1}dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{2}\log|x+1|\right]_2^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\tfrac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_2^b = \log\sqrt{3}.$$

7.4. MÉTODOS NUMÉRICOS DE INTEGRACIÓN

Los métodos de integración numérica proporcionan la posibilidad de calcular de forma aproximada la integral definida de funciones que carecen de primitiva conocida. Para ello se utiliza el concepto de área bajo una curva, que corresponde al cálculo de la integral de la función que representa esa curva.

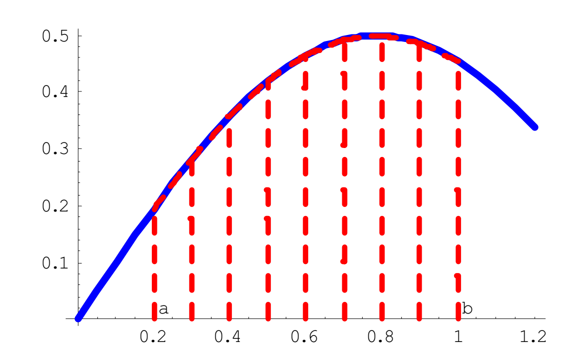
Para calcular de forma aproximada $\int_a^b f(x)dx$ primero se hace una partición del intervalo de integración $x_0 = a,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_n = b$ y se calculan los valores de $y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2), \ldots,\ y_n = f(x_n)$. Para simplificar consideraremos que $f(x) \geq 0$.

7.4.1. Método de los trapecios

Las rectas $x = x_0 = a,\ x = x_1,\ x = x_2, ...,\ x = x_n = b$ dividen al recinto S de integración en franjas. Supongamos que estas franjas tienen por áreas $S_1,\ S_2, ..., S_n$. Entonces, recordando que la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es el área de S, se tiene

$$\int_a^b f(x)dx = S_1 + S_2 + ... + S_n$$

Al sustituir el arco de curva que limita superiormente cada franja por la cuerda respectiva se obtienen unos trapecios que aproximan las franjas. Las áreas de estos trapecios son:



$$\frac{y_0 + y_1}{2} \cdot h\ , \quad \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot h\ , \ldots , \quad \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot h$$

El área de S se puede aproximar por la suma de las áreas de estos trapecios:

$$\frac{y_0 + y_1}{2} \cdot h + \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot h + \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot h + \cdots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot h =$$

$$= \frac{y_0 h}{2} + \frac{y_n h}{2} + h\,(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) =$$

$$= \frac{h}{2}\left[(y_0 + y_n) + 2\,(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})\right]$$

es decir,

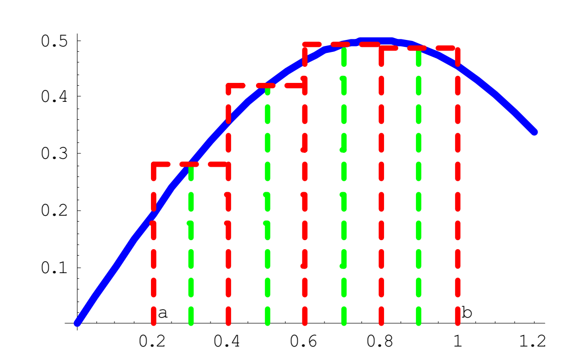
$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2}\left[(y_0 + y_n) + 2\,(y_1 + \ y_2 + ... \ + y_{n-1})\right]$$

7.4.2. Método de los rectángulos

En este caso se divide S en un número par de franjas y se sustituye cada dos de ellas por un rectángulo de base $2h$ y altura la ordenada común a las dos franjas, es decir, se hacen las siguientes susituciones:

La primera y segunda franjas se sustituyen por el rectángulo de base $[a, x_2]$ y altura y_1.

La tercera y cuarta franjas se sustituyen por el rectángulo de base $[x_2, x_4]$ y altura y_3, etc. Por tanto:



$$\int_a^b f(x)dx \simeq 2h\,[y_1 + \; y_3 + y_5 + ... \; + y_{n-1}]$$

Ejemplo 7.20 *Calcular de forma aproximada* $\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$, *utilizando ambos métodos.*

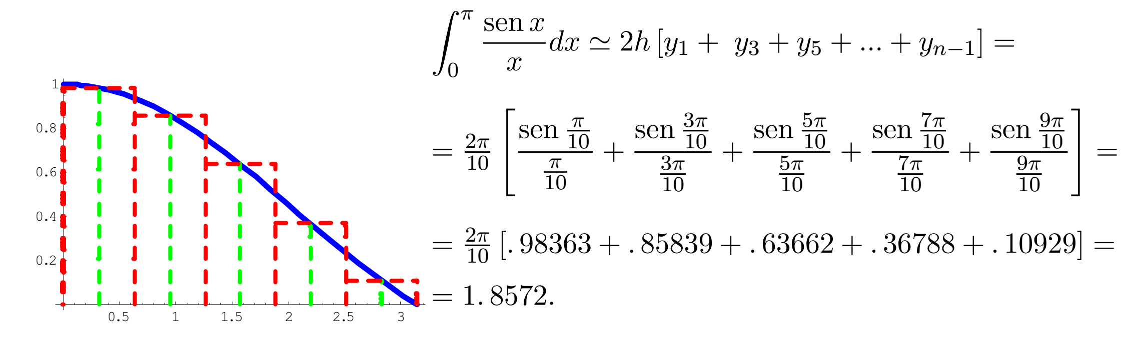
Solución. Esta integral no tiene primitiva conocida, pero al dibujarla se observa que define un área no nula con el eje de las x; por tanto, vamos a calcular esta área de forma aproximada utilizando los métodos anteriores.

Dividimos el intervalo $[0, \pi]$ en 10 subintervalos iguales de anchura $h = \frac{\pi}{10}$, y calculamos el valor de la función en cada uno de esos puntos:

$f(0) = 1$, $f\left(\frac{\pi}{10}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}}{\frac{\pi}{10}} = .983\,63$, $f\left(\frac{2\pi}{10}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{10}}{\frac{2\pi}{10}} = .935\,49$, $f\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{10}}{\frac{3\pi}{10}} = .858\,39$, $f\left(\frac{4\pi}{10}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{4\pi}{10}}{\frac{4\pi}{10}} = .756\,83$, $f\left(\frac{5\pi}{10}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{5\pi}{10}}{\frac{5\pi}{10}} = .636\,62$, $f\left(\frac{6\pi}{10}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{6\pi}{10}}{\frac{6\pi}{10}} = .504\,55$, $f\left(\frac{7\pi}{10}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{7\pi}{10}}{\frac{7\pi}{10}} = .367\,88$, $f\left(\frac{8\pi}{10}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{8\pi}{10}}{\frac{8\pi}{10}} = .233\,87$, $f\left(\frac{9\pi}{10}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{9\pi}{10}}{\frac{9\pi}{10}} = .109\,29$, $f(\pi) = \dfrac{\operatorname{sen}\pi}{\pi} = 0.$

Por tanto, el valor de la integral será:

- método de los rectángulos:



$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \simeq 2h\,[y_1 + \; y_3 + y_5 + ... + y_{n-1}] =$$

$$= \frac{2\pi}{10}\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}}{\frac{\pi}{10}} + \frac{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{10}}{\frac{3\pi}{10}} + \frac{\operatorname{sen}\frac{5\pi}{10}}{\frac{5\pi}{10}} + \frac{\operatorname{sen}\frac{7\pi}{10}}{\frac{7\pi}{10}} + \frac{\operatorname{sen}\frac{9\pi}{10}}{\frac{9\pi}{10}}\right] =$$

$$= \frac{2\pi}{10}\,[.98363 + .85839 + .63662 + .36788 + .10929] =$$

$$= 1.8572.$$

► método de los trapecios:

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \simeq \frac{h}{2}\left[(y_0 + y_n) + 2\left(y_1 + \ y_2 + ... + y_{n-1}\right)\right] =$$

$$= \frac{\pi}{20}[1 + 2(\frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{10}}{\frac{\pi}{10}} + \frac{\operatorname{sen} \frac{2\pi}{10}}{\frac{2\pi}{10}} + \frac{\operatorname{sen} \frac{3\pi}{10}}{\frac{3\pi}{10}} + \frac{\operatorname{sen} \frac{4\pi}{10}}{\frac{4\pi}{10}} +$$

$$+ \frac{\operatorname{sen} \frac{5\pi}{10}}{\frac{5\pi}{10}} + \frac{\operatorname{sen} \frac{6\pi}{10}}{\frac{6\pi}{10}} + \frac{\operatorname{sen} \frac{7\pi}{10}}{\frac{7\pi}{10}} + \frac{\operatorname{sen} \frac{8\pi}{10}}{\frac{8\pi}{10}} + \frac{\operatorname{sen} \frac{9\pi}{10}}{\frac{9\pi}{10}})] =$$

$$= 1.849\,3.$$

El valor, aproximado, que da el Mathematica es: $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \simeq 1.851\,9$

TEMA 8

INTEGRACIÓN MÚLTIPLE

8.1. LA INTEGRAL DOBLE

8.1.1. Integrales dobles sobre rectángulos

Dada una función $f(x,y)$ que está definida en una región rectangular $D \subset \mathbf{R}^2$, $R : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$, acotada en dicha región, y dada una partición $P = P_1 \times P_2$ con $P_1 = \{a = x_0, x_1, ..., x_m = b\}$ y $P_2 = \{c = y_0, y_1, ...y_n = d\}$ se definen las *sumas superiores e inferiores de Riemann* de forma análoga al caso unidimensional:

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\left(x_i - x_{i-1}\right)\left(y_j - y_{j-1}\right)$$

donde $M_{ij} = \sup\left\{f\left(x,y\right), \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad y_{j-1} \leq y \leq y_j\right\}$, y

$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\left(x_i - x_{i-1}\right)\left(y_j - y_{j-1}\right)$$

donde $m_{ij} = \inf\left\{f\left(x,y\right), \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad y_{j-1} \leq y \leq y_j\right\}$.

Si estas sumas tienden a un límite cuando $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Este límite se conoce como **integral doble** y se demuestra que es independiente de la partición

$$\iint_D f\left(x,y\right)dxdy = \lim_{\Delta A \to 0}\sum_{k=1}^{\infty} f\left(x_k, y_k\right)\Delta A_k$$

Se dice entonces que la *función f es integrable Riemann en el rectángulo D.*

Teorema 27 (Criterio de integrabilidad de Riemann) *Sea $f : D = [a,b] \times [c,d] \to \mathbf{R}$, f es integrable Riemann en D si, y sólo si, existe una partición P_ε del rectángulo D tal que*

$$U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$$

Propiedades

1. $\iint_D kf\left(x,y\right)dA = k\iint_D f\left(x,y\right)dA$, $k \in \mathbf{R}$.
2. $\iint_D \left[f\left(x,y\right) + g(x,y)\right]dA = \iint_D f\left(x,y\right)dA + \iint_D g(x,y)dA$.
3. $\iint_D f\left(x,y\right)dA \geq 0$ si $f\left(x,y\right) \geq 0$ en D.

4. $\iint_D f(x,y)\,dA \geq \iint_D g(x,y)dA$ si $f(x,y) \geq g(x,y)$ en D.

5. Sea $D = D_1 + D_2$, donde D_1 y D_2 son disjuntos salvo en un lado. La función $f(x,y)$ es integrable Riemann si, y sólo si, es integrable en D_1 y D_2. Además

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)dA$$

Si $f(x,y) > 0$ en el rectángulo D, la integral doble se puede interpretar como el volumen delimitado por las superfície $z = f(x,y)$ y el plano xy, en D. Cada término $f(x_k, y_k)\,\Delta A_k$ será el volumen del paralelepípedo sobre el rectángulo k-ésimo. La suma de todos estos paralelepípedos da el volumen bajo la superfície cuando $\Delta A_k \to 0$.

Teorema 28 *Si $f : D \to \mathbf{R}$ es continua en $D \Rightarrow f$ es integrable en D.*

Teorema 29 *Si $f : D \to \mathbf{R}$ es continua en D salvo en un número finito de puntos o en una curva $\Rightarrow f$ es integrable en D.*

Teorema 30 (del valor medio) *Si $f : D \to \mathbf{R}$ es continua en D entonces existe al menos un punto $(x_0, y_0) \in D$ tal que*

$$\iint_D f(x,y)\,dA = f(x_0, y_0) \cdot A(D)$$

siendo $A(D)$ el área del rectángulo D.

8.1.2. Evaluación de la integral doble por medio de una integral iterada

Teorema 31 (de Fubini) *Si $f : D \to \mathbf{R}$ es integrable Riemann en D tal que $\forall x \in [a,b]$ la función $f_x : [c,d] \to \mathbf{R}$ dada por $f_x(y) = f(x,y)$ es integrable Riemann en $[c,d]$, entonces la función $g(x) = \int_c^d f_x(y)\,dy$ es integrable Riemann en $[a,b]$ y se verifica*

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

Si $f : D \to \mathbf{R}$ es integrable Riemann en D tal que $\forall y \in [c,d]$ la función $g_y : [a,b] \to \mathbf{R}$ dada por $g_y(x) = f(x,y)$ es integrable Riemann en $[a,b]$, entonces la función $f(y) = \int_a^b g_y(x)\,dx$ es integrable Riemann en $[c,d]$ y se verifica

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

Es decir, se puede calcular una integral doble mediante dos integrales iteradas, integrando una variable cada vez mediante las técnicas de integración de una variable.

8.1.3. Integrales sobre conjuntos más generales

Para definir una integral doble de una función $f(x,y)$ en una región no rectangular D, se supone superpuesta una malla rectangular y se incluye en la suma sólo los elementos que están completamente en D. Cuando esta malla se hace más fina crece el número de términos de la suma. Si f es continua y la frontera de D

está formada por un número finito de segmentos de rectas o curvas suaves unidas por sus extremos, entonces las sumas tendrán un límite cuando $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Este límite será la integral doble sobre D :

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{\Delta A \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k$$

Teorema 32 (de Fubini) *Sea $f : D \to \mathbf{R}$ es integrable Riemann en una región D acotada:*

1. *Si D está definida por $a \le x \le b$, $f_1(x) \le y \le f_2(x)$ continuas en $[a,b]$, entonces*
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

2. *Si D está definida por $c \le y \le d$, $g_1(y) \le x \le g_2(y)$ continuas en $[c,d]$, entonces*
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Ejemplo 8.1 *Determinar el volumen del prisma cuya base es el triángulo del plano acotado por el eje X y las rectas $y = x$ y $x = 1$ y cuya cara superior está en el plano $x + y + z - 3 = 0$.*

Solución. La región de integración es la de la figura; la integral doble será:

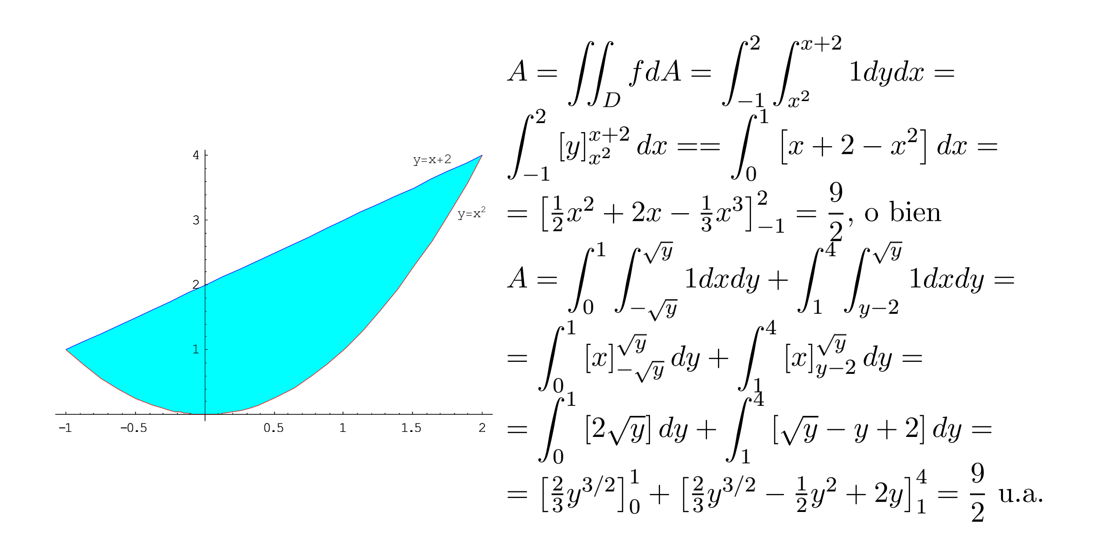
$$\iint_D f dA = \int_0^1 \int_0^x (3 - x - y)\,dydx =$$
$$= \int_0^1 \left[3y - xy - \frac{1}{2}y^2 \right]_0^x dx = \int_0^1 \left[3x - x^2 - \frac{1}{2}x^2 \right] dx =$$
$$= \left[\tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x^3 \right]_0^1 = 1 \text{ u.v. (unidades de volumen)}$$

O, invirtiendo el orden de integración:

$$\iint_D f dA = \int_0^1 \int_y^1 (3 - x - y)\,dxdy = \int_0^1 \left[3x - xy - \frac{1}{2}x^2 \right]_y^1 dy =$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{5}{2} - 4y + \frac{3}{2}y^2 \right] dy = \left[\frac{5}{2}y - 2y^2 + \frac{1}{2}y^3 \right]_0^1 = 1 \text{ u.v.}$$

Ejemplo 8.2 *Hallar el área de la región D encerrada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 2$.*

Solución. El área se puede calcular mediante una integral sencilla, aplicando los resultados obtenidos en el tema anterior, o bien mediante una integral doble donde $f = 1$.



$$A=\iint_D f dA=\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2}1dydx=$$
$$\int_{-1}^{2}[y]_{x^2}^{x+2}\,dx==\int_{0}^{1}\left[x+2-x^2\right]dx=$$
$$=\left[\tfrac{1}{2}x^2+2x-\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2},\text{ o bien}$$
$$A=\int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}1dxdy+\int_1^4\int_{y-2}^{\sqrt{y}}1dxdy=$$
$$=\int_0^1[x]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\,dy+\int_1^4[x]_{y-2}^{\sqrt{y}}\,dy=$$
$$=\int_0^1\left[2\sqrt{y}\right]dy+\int_1^4\left[\sqrt{y}-y+2\right]dy=$$
$$=\left[\tfrac{2}{3}y^{3/2}\right]_0^1+\left[\tfrac{2}{3}y^{3/2}-\tfrac{1}{2}y^2+2y\right]_1^4=\frac{9}{2}\text{ u.a.}$$

8.1.4. Las integrales dobles en coordenadas polares

Un punto del plano puede expresarse en función de su distancia al origen y el ángulo que forma respecto al eje X; cuando se expresa en estos términos se están utilizando las **coordenadas polares**. Su relación con las coordenadas cartesianas es

$$x=r\cos\theta;\quad r^2=x^2+y^2$$
$$y=r\,\mathrm{sen}\,\theta;\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

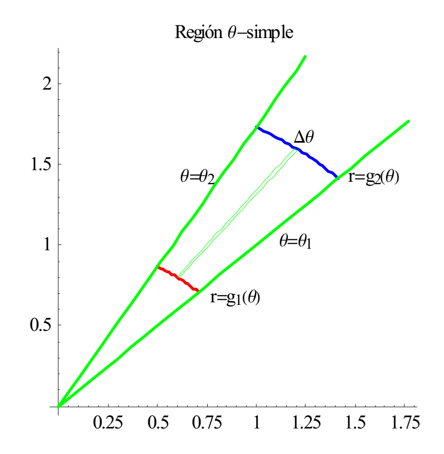
En algunos casos, dependiendo del dominio de integración, el cálculo de una integral doble es más sencillo si se usan este tipo de coordenadas. Para hacer esto, se han de expresar x e y en términos de r y θ y tener en cuenta que el área de uno de los ‹‹rectángulos› › infinitesimales es:

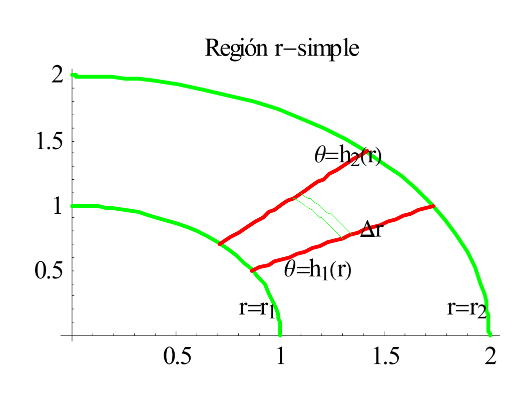
$$\Delta A=r\Delta r\Delta\theta$$

ya que Δarco=radio·Δángulo. Por tanto

$$\iint_D f dA = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}\int_{r=g_1(\theta)}^{r=g_2(\theta)} f(r,\theta)\,rdrd\theta,\ \text{o}$$
$$\iint_D f dA = = \int_{r=a}^{r=b}\int_{\theta=h_1(r)}^{\theta=h_2(r)} f(r,\theta)\,rd\theta dr$$

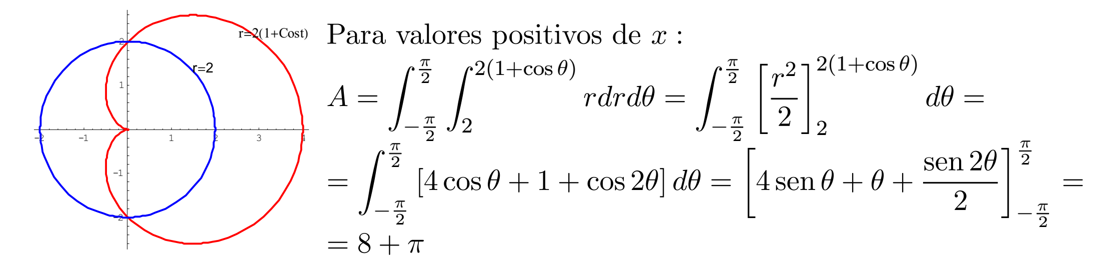
donde la elección del orden de integración viene dada por la forma de la región, tal y como se observa en las siguientes figuras:





Ejemplo 8.3 *Calcular el área comprendida entre el cardioide $r = 2(1 + \cos\theta)$ y el circulo $r = 2$.*

Solución. .



Para valores positivos de x :

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{2}^{2(1+\cos\theta)} r dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_2^{2(1+\cos\theta)} d\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [4\cos\theta + 1 + \cos 2\theta]\, d\theta = \left[4 \operatorname{sen}\theta + \theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 8 + \pi$$

El valor de la integral para las x negativas es:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{2(1+\cos\theta)}^{2} r dr d\theta = 8 - \pi.$$

Por tanto el área total comprendida entre el cardiode y el círculo es:

$A = 16$ (unidades de área).

Ejemplo 8.4 *Calcular la siguiente integral utilizando coordenadas polares.*

Solución. $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \left(y^2 + x^2\right) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^2 r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a d\theta =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{a^4}{4}\right] d\theta = \frac{a^4}{4}\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^4}{8}\pi$$

8.2. INTEGRALES TRIPLES

De forma análoga a $\mathbf{R}^2$ se construye un intervalo tridimensional como $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] =$
$= \left\{(x, y, , z) \in \mathbf{R}^3 / a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2,\ a_3 \leq z \leq b_3\right\}$ y se define el volumen de este paralelepípedo como $Vol(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$. Se define asimismo una partición $P = P_1 \times P_2 \times P_3$ de I donde cada P_j divide el intervalo $[a_j, b_j]$ en n_j subintervalos. P divide a I en $n_1 n_2 n_3$ subintervalos tridimensionales.

Por tanto, se pueden introducir las sumas *superior e inferior de Riemann* igual que antes. Sea $I \subset \mathbf{R}^3$ y $f : I \to \mathbf{R}$ acotada. Dada una partición P de I, entonces

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} M_{ijk} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

donde $M_{ijk} = \sup\{f(x, y, z),\quad x_{i-1} \leq x \leq x_i,\quad y_{j-1} \leq y \leq y_j,\quad z_{k-1} \leq z \leq z_k\}$.

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} m_{ijk} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

donde $m_{ijk} = \inf\{f(x, y, z),\quad x_{i-1} \leq x \leq x_i,\quad y_{j-1} \leq y \leq y_j,\quad z_{k-1} \leq z \leq z_k\}$.

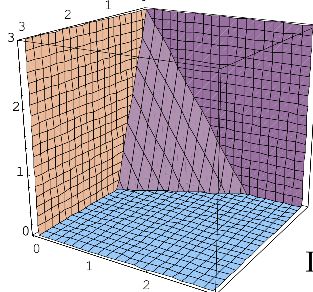
Estas sumas también tienden a un límite cuando $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$. Este límite se conoce como **integral triple** y se demuestra que es independiente de la partición

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz = \lim_{\Delta V \to 0} \sum_{i,j,k}^{\infty} f(c_{ijk})\, \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

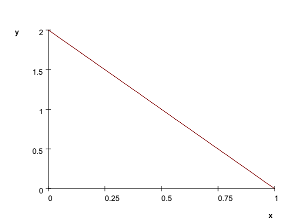
Para el cálculo de estas integrales se utilizan integrales iteradas ya que existe el equivalente del teorema de Fubini para funciones de tres variables. La dificultad estriba ahora en encontrar los límites de integración para cada variable. Se aconseja buscar los límites de integración en el plano y después, desde un punto arbitrario de éste dominio, estudiar los límites de z.

Ejemplo 8.5 *Calcular el volumen del tetraedro formado por los planos coordenados y el plano* $6x + 3y + 2z = 6$.

Solución. El tetraedro es:



La región en el plano xy es:



$$V = \int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} dzdydx = \int_0^1 \int_0^{2-2x} [z]_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} dydx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \left[3 - 3x - \frac{3}{2}y\right] dydx = \int_0^1 \left[3y - 3xy - \frac{3}{4}y^2\right]_0^{2-2x} dx =$$

$$= \int_0^1 3(1-x)^2\, dx = -\left[(1-x)^3\right]_0^1 = 1 \text{ u.v.}$$

El valor de dicho volumen debe ser independiente de la elección del orden de iteracción, así:

$$V = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}y} \int_0^{1-\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}z} dxdzdy = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}y} [x]_0^{1-\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}z} dzdy =$$

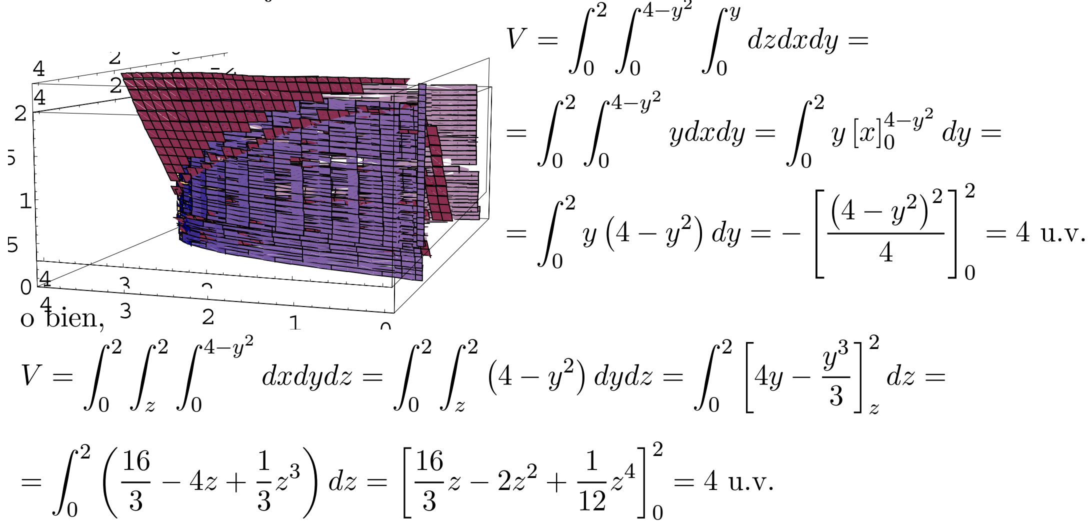
$$= \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}y} \left[1 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z\right] dzdy = \int_0^2 \left[z - \frac{1}{2}yz - \frac{1}{6}z^2\right]_0^{3-\frac{3}{2}y} dy =$$

$$= \int_0^2 \left[\left(1 - \frac{1}{2}y\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}y\right)\right]_0^{2-2x} dy = \frac{3}{2}\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{2}y\right)^2 dy =$$

$$= -\left[\left(1 - \tfrac{1}{2}y\right)^3\right]_0^2 = 1 \text{ u.v.}$$

Ejemplo 8.6 *Calcular el volumen acotado en el primer octante por el cilindro* $x = 4 - y^2$ *y los planos* $z = y$, $x = 0$, $z = 0$.

Solución. El dibujo es:



$$V=\int_0^2\int_0^{4-y^2}\int_0^y dzdxdy=$$

$$=\int_0^2\int_0^{4-y^2} ydxdy=\int_0^2 y\,[x]_0^{4-y^2}\,dy=$$

$$=\int_0^2 y\left(4-y^2\right)dy=-\left[\frac{\left(4-y^2\right)^2}{4}\right]_0^2=4\text{ u.v.}$$

o bien,

$$V=\int_0^2\int_z^2\int_0^{4-y^2} dxdydz=\int_0^2\int_z^2\left(4-y^2\right)dydz=\int_0^2\left[4y-\frac{y^3}{3}\right]_z^2 dz=$$

$$=\int_0^2\left(\frac{16}{3}-4z+\frac{1}{3}z^3\right)dz=\left[\frac{16}{3}z-2z^2+\frac{1}{12}z^4\right]_0^2=4\text{ u.v.}$$

8.2.1. Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

Las **coordenadas cilíndricas** son como las coordenadas polares en el plano, al que se ha añadido el eje z. Son útiles cuando aparecen problemas donde hay una simetría alrededor de un eje.

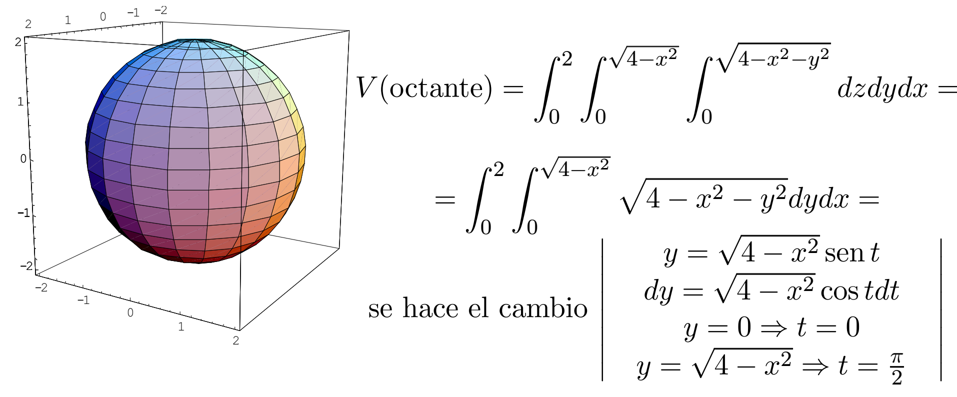
$x=r\cos\theta$ $y=r\operatorname{sen}\theta$ $z=z$	$r=x+y$ $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$
$dV=rdrd\theta dz$	

Las **coordenadas esféricas** son útiles en aplicaciones que tienen simetría respecto del origen.

$x=\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta$ $y=\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$ $z=\rho\cos\phi$	$\rho^2=x^2+y^2+z^2$ $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ $\cos\phi=\frac{z}{\rho}$
$dV=\rho^2\operatorname{sen}\phi d\rho d\phi d\theta$	

Ejemplo 8.7 *Calcular el volumen de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ utilizando los tres tipos de coordenadas.*

Solución. Debido a la simetría existente, en el cálculo del volumen en coordenadas cartesianas, calcularemos el volumen de un octante y lo multiplicaremos por 8.



$$V(\text{octante})=\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx=$$

$$=\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{4-x^2-y^2}dydx=$$

se hace el cambio
$$\left|\begin{array}{c} y=\sqrt{4-x^2}\operatorname{sen}t \\ dy=\sqrt{4-x^2}\cos tdt \\ y=0\Rightarrow t=0 \\ y=\sqrt{4-x^2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\end{array}\right|$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4 - x^2 - \left(\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{sen}\,t\right)^2}\sqrt{4-x^2}\cos t dt dx =$$
$$= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(4-x^2)\cos^2 t}\sqrt{4-x^2}\cos t dt dx = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4-x^2\right)\cos^2 t dt dx =$$
$$= \int_0^2 \left(4-x^2\right)\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \int_0^2 \left(4-x^2\right)\frac{\pi}{4}dx =$$
$$= \frac{\pi}{4}\left[4x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \tfrac{4\pi}{3} \text{ u.v. } \Rightarrow V(\text{esfera}) = \frac{32\pi}{3} \text{ u.v.}$$

En coordenadas cilíndricas calcularemos el volumen de la semiesfera superior y multiplicaremos por 2.

$$V(\text{semiesfera}) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r dz d\theta dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r\sqrt{4-r^2} d\theta dr =$$
$$= -\pi \int_0^2 -2r\sqrt{4-r^2} d\theta dr = -\pi \left[\frac{\left(4-r^2\right)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{16\pi}{3} \text{ u.v.}$$
$$\Rightarrow V(\text{esfera}) = \frac{32\pi}{3} \text{ u.v.}$$

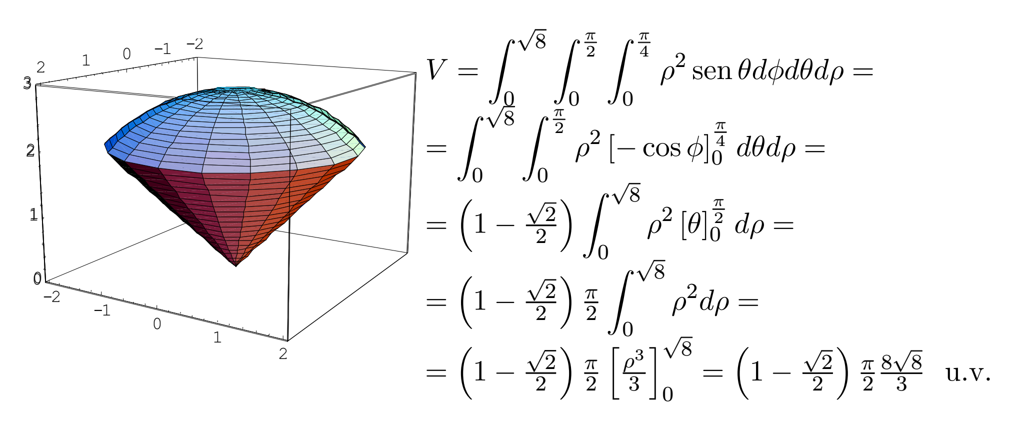
En coordenadas esféricas, se calcula el volumen global de la esfera.

$$V(\text{esfera}) = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta d\phi d\theta d\rho = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \rho^2\left[-\cos\phi\right]_0^{\pi} d\theta d\rho =$$
$$= 2\int_0^2 \rho^2\left[\theta\right]_0^{2\pi} d\rho = 4\pi \int_0^2 \rho^2 d\rho = \frac{4\pi}{3}\left[\rho^3\right]_0^2 = \frac{32\pi}{3} \text{ u.v}$$

8.3. Aplicaciones

Ejemplo 8.8 *Calcular el volumen de la región del primer octante limitada por el cono* $z = \sqrt{x^2+y^2}$ *y la esfera* $x^2+y^2+z^2 = 8$.

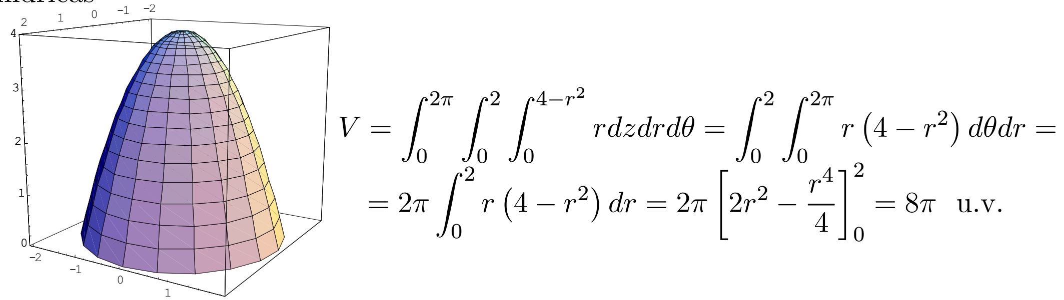
Solución. Debido a la simetría de rotación alrededor del eje z, utilizaremos coordenadas esféricas



$$V = \int_0^{\sqrt{8}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta d\phi d\theta d\rho =$$
$$= \int_0^{\sqrt{8}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2\left[-\cos\phi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta d\rho =$$
$$= \left(1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^{\sqrt{8}} \rho^2\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\rho =$$
$$= \left(1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\tfrac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{8}} \rho^2 d\rho =$$
$$= \left(1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\tfrac{\pi}{2}\left[\tfrac{\rho^3}{3}\right]_0^{\sqrt{8}} = \left(1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\tfrac{\pi}{2}\tfrac{8\sqrt{8}}{3} \text{ u.v.}$$

Ejemplo 8.9 *Hallar el volumen acotado por el plano* $z = 0$ *y por el paraboloide* $z = 4 - x^2 - y^2$.

Solución. Dado que existe simetría alrededor del eje z, usaremos coordenadas cilíndricas



$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{4-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2}\int_0^{2\pi} r\left(4-r^2\right)d\theta\,dr =$$
$$= 2\pi\int_0^{2} r\left(4-r^2\right)dr = 2\pi\left[2r^2-\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi \quad \text{u.v.}$$

Las integrales dobles y triples se usan en múltiples aplicaciones, en particular las usaremos para el cálculo de la masa de sólidos y de placas delgadas (que se pueden considerar planas) cuya densidad no siempre sea constante; este cálculo viene dado por las fórmulas:

$$m = \iint_D \delta\left(x,y\right)dA, \qquad m = \iiint_V \delta\left(x,y,z\right)dxdydz$$

siendo δ la densidad.

También las usaremos para calcular los centros de masa de estas placas y sólidos, las fórmulas del centro de masa de placas delgadas son:

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\delta\left(x,y\right)dA}{\iint_D \delta\left(x,y\right)dA}, \qquad \bar{y} = \frac{\iint_D y\delta\left(x,y\right)dA}{\iint_D \delta\left(x,y\right)dA}$$

Para un sólido:

$$\bar{x} = \frac{\iiint_V x\delta\left(x,y,z\right)dxdydz}{\iiint_V \delta\left(x,y,z\right)dxdydz}, \qquad \bar{y} = \frac{\iiint_V y\delta\left(x,y,z\right)dxdydz}{\iiint_V \delta\left(x,y,z\right)dxdydz},$$
$$\bar{z} = \frac{\iiint_V z\delta\left(x,y,z\right)dxdydz}{\iiint_V \delta\left(x,y,z\right)dxdydz}$$

TEMA 9

INTEGRAL DE LÍNEA

En este tema necesitamos introducir nuevas funciones de variable real, las funciones vectoriales.

9.1. FUNCIONES VECTORIALES

Consideremos f_1, f_2 y f_3 funciones reales definidas en un cierto intervalo $I \subset \mathbf{R}$, para cada $t \in I$ podemos formar el vector $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ y crear una función con valores vectoriales, a la que llamaremos **función vectorial**. Llamaremos t a la variable independiente. Un punto t pertenece al dominio de esta función si, y sólo si, pertenece a todos los dominios de las funciones componentes f_1, f_2 y f_3, es decir, el dominio de la función vectorial será la intersección de los dominios de cada una de las funciones componentes, por tanto el dominio sea un subconjunto de $\mathbf{R}$. Su imagen está en el espacio $\mathbf{R}^3$. Si la tercera componente es nula, $f_3(t) = 0$, su imagen está en el espacio $\mathbf{R}^2$.

Por ejemplo, a partir de las funciones

$$f_1(t) = x_0 + tv_1, \qquad f_2(t) = y_0 + tv_2, \qquad f_3(t) = z_0 + tv_3$$

se puede formar la función vectorial:

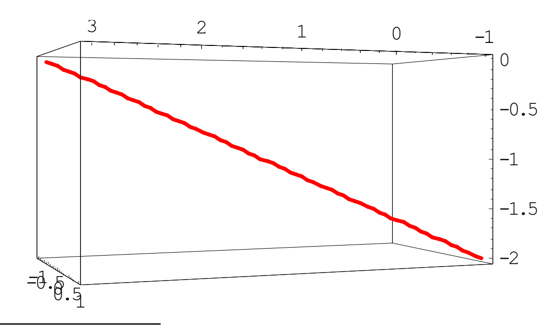
$$\vec{f}(t) = (x_0 + tv_1,\ y_0 + tv_2,\ z_0 + tv_3)$$

que corresponde al radio vector[1] que recorre todos los puntos de la recta que pasa por $P(x_0,\ y_0,\ z_0)$ y tiene por vector director a $\vec{v} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$.

Ejemplo 9.1 *Dibuja la recta correspondiente a la función vectorial*

$$\vec{f}(t) = (1 + 2t, -t, -1 + t).$$

Solución 1 *Esta función vectorial corresponde a la recta que pasa por el punto $P(1, 0, -1)$ y tiene por vector director $\vec{v} = (2, -1, 1)$:*



[1] Un radio vector es un vector cuyo origen es el origen de coordenadas.

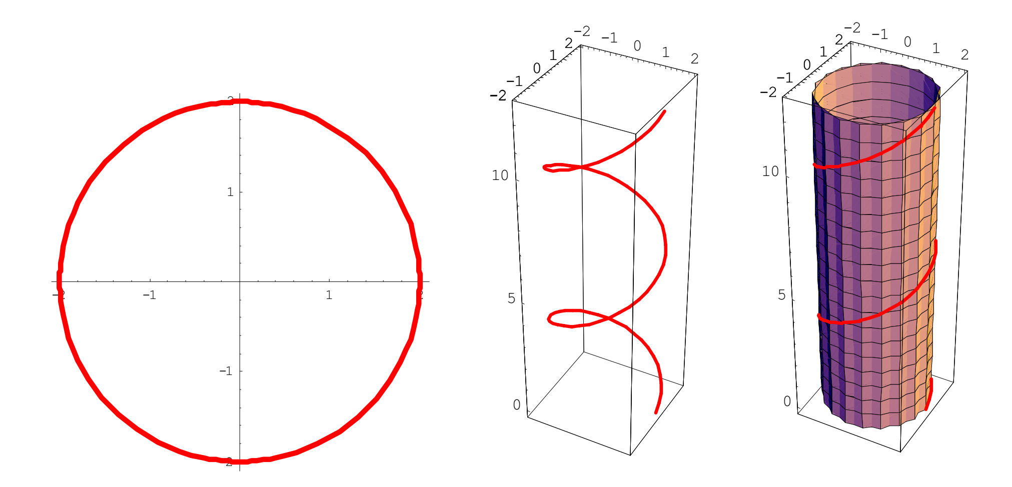
Si el dominio de las funciones es $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$ se obtienen campos de vectores, es decir, en cada punto del plano o del espacio está asociado un vector.

9.1.1. Curvas

En particular, a toda función real $f(x)$ definida en un cierto intervalo $[a,b]$ se le puede asociar de forma natural una función vectorial $\vec{f}(x) = (x, f(x))$, haciendo $f_1(x) = x$, $f_2(x) = f(x)$; cuando x varia desde a hasta b el radio vector $\vec{f}(x)$ recorre todos los puntos de la curva $y = f(x)$; en este caso se suele hacer $x = t$ y utilizarlo como parámetro.

Ejemplo 9.2 $\vec{f}(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t)$, $t \in [0, 2\pi]$ *describe la circunferencia centrada en el origen de radio 2.*

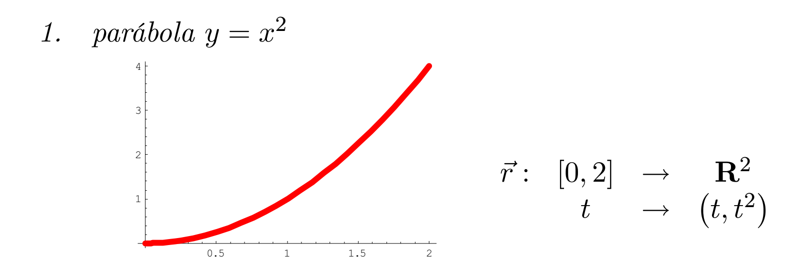
Ejemplo 9.3 $\vec{f}(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t, t)$, $t > 0$ *describe un movimiento helicoidal, alrededor de un cilindro de radio 2*



En general, la gráfica de una función vectorial que depende de una sóla variable t definida en un intervalo $[a,b]$, es una curva C; es decir, a medida que t recorre el intervalo $[a,b]$, el extremo del vector $\vec{f}(t)$ recorre los puntos de la curva C, que estará en el espacio si $\vec{f}(t)$ tiene tres componentes, y en el plano, si $\vec{f}(t)$ tiene dos componentes. Es decir, una función vectorial **parametriza** una curva. Se suele denotar por $\vec{r}(t)$ a la función que parametriza la curva. Nótese que una curva parametrizada adquiere una orientación, es decir, a medida que t crece la curva se recorre en un determinado sentido. En el ejemplo anterior de la circunferencia parametrizada por $\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t)$, $t \in [0, 2\pi]$ está recorrida en sentido antihorario; si la escribimos como $\vec{r}(t) = (2\cos t, -2\,\mathrm{sen}\, t)$, $t \in [0, 2\pi]$ la estamos recorriendo en sentido horario. Por tanto, al cambiar la parametrización de una curva se ha de tener en cuenta si se invierte o no el sentido de recorrido.

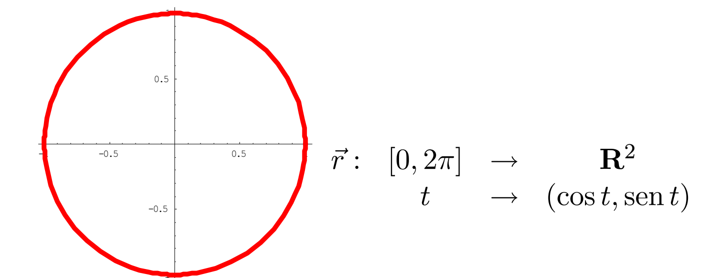
Ejemplo 9.4 *Parametrizar las curvas siguientes:*

1. *parábola* $y = x^2$



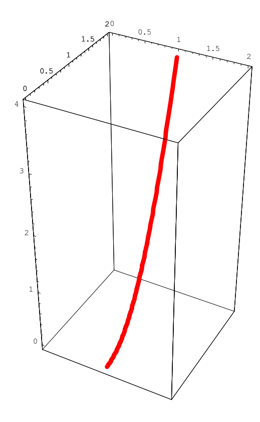
$$\begin{array}{rccc} \vec{r}: & [0,2] & \to & \mathbf{R}^2 \\ & t & \to & (t, t^2) \end{array}$$

2. circunferencia $x^2 + y^2 = 1$



$$\begin{array}{rccc} \vec{r}: & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ & t & \longrightarrow & (\cos t, \operatorname{sen} t) \end{array}$$

3. parábola $x = 1,\ z = y^2$

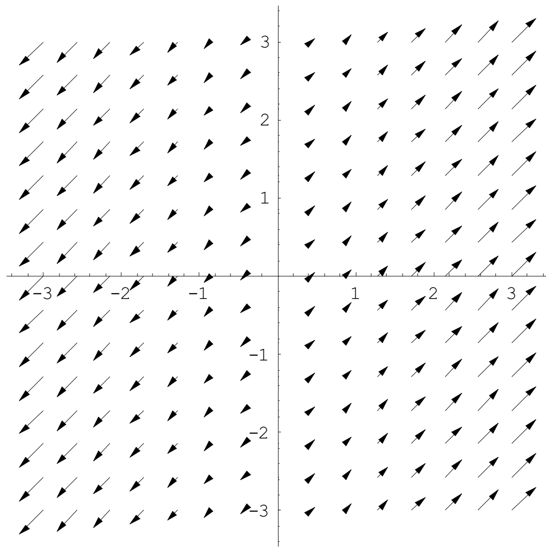


$$\begin{array}{rccc} \vec{r}: & [0, 2] & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ & t & \longrightarrow & (1, t, t^2) \end{array}$$

9.1.2. Campos de vectores

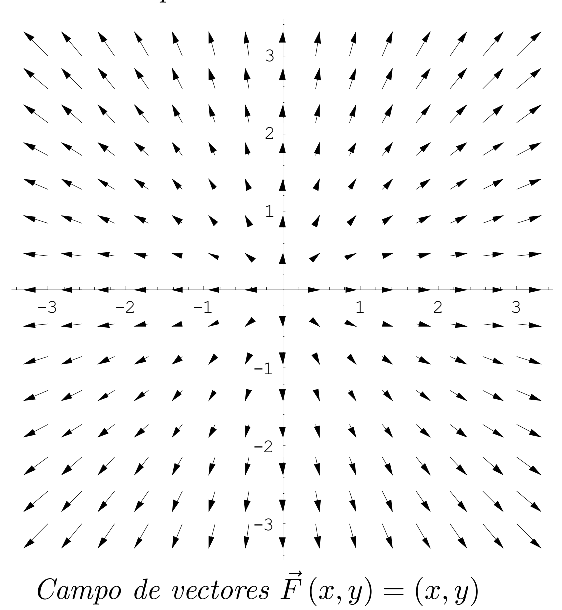
Los **campos de vectores** son funciones vectoriales que asocian un vector a cada punto del plano o del espacio.

Ejemplo 9.5 *La función* $\vec{F}(x, y) = (x, x)$ *asocia el vector* (x, x) *a cada punto del plano, por ejemplo, asocia el vector* $(1, 1)$ *a todos los puntos cuya abscisa valga 1, el* $(2, 2)$ *a todos los puntos que tengan abscisa 2, etc. Si se dibuja se obtiene un campo de vectores paralelos entre sí, de sentido contrario según que estén en las x positivas o negativas y de modulo proporcional al valor de x del punto donde se aplican:*



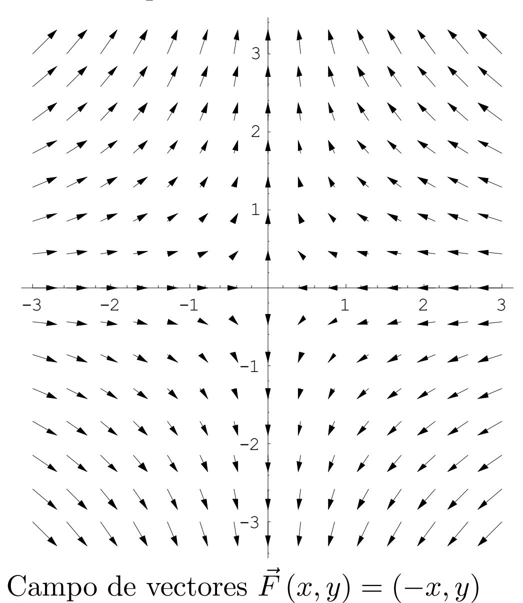
Campo de vectores $\vec{F}(x, y) = (x, x)$

Ejemplo 9.6 *La función* $\vec{F}(x,y) = (x,y)$ *asocia el vector* (x,y) *a cada punto del plano, por ejemplo, asocia el vector* $(1,1)$ *al punto* $P(1,1)$*, el* $(2,2)$ *al punto* $P(2,2)$*, etc. Si se dibuja se obtiene el campo de vectores:*



Campo de vectores $\vec{F}(x,y) = (x,y)$

La función $\vec{F}(x,y) = (-x,y)$ asocia el vector $(-x,y)$ a cada punto del plano, por ejemplo, asocia el vector $(-1,1)$ al punto $P(1,1)$, el $(-2,2)$ al punto $P(2,2)$, etc. Si se dibuja se obtiene el campo de vectores:



Campo de vectores $\vec{F}(x,y) = (-x,y)$

Se puede pensar en los campos de vectores como *campos de fuerza*. Si se deja una partícula en un campo de fuerzas, la partícula se moverá siguiendo las líneas del campo, a menos que se realice una fuerza externa que lo compense, es decir, se realice un trabajo. Lo veremos más adelante.

9.2. LONGITUD DE UNA CURVA

Como se ha visto, un **camino** en $\mathbf{R}^n$ es una aplicación $\vec{r} : [a,b] \to \mathbf{R}^n$. Si esta aplicación es diferenciable se dice que el camino también lo es. La imagen de la aplicación se conoce como **curva.**

Es útil escribir la aplicación $\vec{r}$ en términos de un parámetro $t \in [a, b]$, de forma que $\vec{r}(t)$ dibuja la curva al variar t.

Veamos cómo calcular la longitud de una de estas curvas. Consideremos que la curva está en el plano y que es diferenciable

$$\begin{array}{rccc} \vec{r}: & [a,b] & \to & \mathbf{R}^2 \\ & t & \to & (x(t), y(t)) \end{array}$$

Se hace una partición del intervalo $[a, b]$, $a = t_0,\ t_1,\ t_2,\ ..., t_n = b$, lo que corresponde a dividir la curva en n trozos. Esos trozos de curva se aproximan por las rectas que los unen; la longitud de la curva C se aproxima por la suma de todos esos trozos de rectas. Recordando que la distancia entre dos puntos viene dada por:

$$d(P,Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$$

una primera aproximación de la longitud de la curva se puede escribir como:

$$\begin{aligned} l(C) = & \sqrt{[x(t_1) - x(t_0)]^2 + [y(t_1) - y(t_0)]^2} + \\ & + \sqrt{[x(t_2) - x(t_1)]^2 + [y(t_2) - y(t_1)]^2} + \ldots = \\ = & \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2} = \\ = & \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \end{aligned}$$

Aplicando el teorema del valor medio[2] sabemos que en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ habrá un punto c_i tal que

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(c_i)\,(t_i - t_{i-1})$$

y otro punto d_i tal que

$$y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(d_i)\,(t_i - t_{i-1}).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} l(C) &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x'(c_i)\,(t_i - t_{i-1})]^2 + [y'(d_i)\,(t_i - t_{i-1})]^2} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x'(c_i)]^2 + [y'(d_i)]^2}(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

En el límite, cuando $n \to \infty$ se obtiene la longitud de la curva, ya que entonces $\Delta t_i \to 0$:

$$l(C) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta t_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x'(c_i)]^2 + [y'(d_i)]^2}\Delta t_i$$

lo que coincide con el valor de la integral

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt = \int_C ds$$

[2]Veáse el teorema 5.3.4.

Esta definición se puede ampliar fácilmente a curvas en $\mathbf{R}^3$

$$l(C)=\int_a^b\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}dt=\int_C ds$$

En el caso de que las curvas tengan distintas definiciones en intervalos diferentes (curvas suaves a trozos), la longitud total se obtiene sumando las longitudes de los distintos trozos.

Ejemplo 9.7 *Calcular las longitudes de las curvas del ejemplo 9.4.*

Solución. La longitud del trozo de parábola será:

$$\begin{array}{rccc|cc} \vec{r}: & [0,2] & \to & \mathbf{R}^2 & x(t)=t & x'(t)=1 \\ & t & \to & (t,t^2) & y(t)=t^2 & y'(t)=2t \end{array}$$

$$l(C)=\int_C ds=\int_0^2\sqrt{1+4t^2}dt=$$

$$\left|\begin{array}{lcl} \sqrt{1+4t^2}=2t+u=\frac{1+u^2}{2u} & & \\ 1+4t^2=4t^2+4tu+u^2 & \Rightarrow & \begin{array}{l} t=0\Rightarrow u=1 \\ t=2\Rightarrow u=\sqrt{17}-4 \end{array} \\ t=\frac{1-u^2}{4u},\quad dt=-\frac{1+u^2}{4u^2}du & & \end{array}\right|$$

$$=-\frac{1}{8}\int_1^{\sqrt{17}-4}\frac{1+2u^2+u^4}{u^3}du=$$

$$=-\frac{1}{8}\left[\frac{u^{-2}}{-2}+2\log u+\frac{u^2}{2}\right]_1^{\sqrt{17}-4}=4.\,646\,8 \text{ u.l. (unidades de longitud).}$$

La longitud del trozo de circunferencia será:

$$\begin{array}{rccc|cc} \vec{r}: & [0,\pi] & \to & \mathbf{R}^2 & x(t)=\cos t & x'(t)=-\operatorname{sen} t \\ & t & \to & (\cos t,\operatorname{sen} t) & y(t)=\operatorname{sen} t & y'(t)=\cos t \end{array}$$

$$l(C)=\int_C ds=\int_0^{\pi}\sqrt{\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t}dt=\pi \text{ u.l.}$$

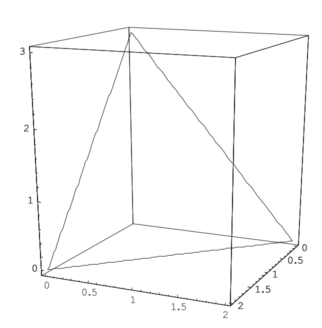
La longitud de la curva tridimensional será:

$$\begin{array}{rccc|cc} \vec{r}: & [0,2] & \to & \mathbf{R}^3 & x(t)=1 & x'(t)=0 \\ & t & \to & (1,t,t^2) & y(t)=t & y'(t)=1 \\ & & & & z(t)=t^2 & z'(t)=2t \end{array}$$

$$l(C)=\int_C ds=\int_0^2\sqrt{1+4t^2}dt=4.\,646\,8 \text{ u.l.}$$

Ejemplo 9.8 *Calcular el perímetro del triángulo* $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,3)$

Solución. Las parametrizaciones elegidas para cada uno de los lados son:



$$AB:\begin{cases} x(t)=-2t+2 & x'(t)=-2 & \\ y(t)=2t & y'(t)=2 & t\in[0,1] \\ z(t)=0 & z'(t)=0 & \end{cases}$$
$$BC:\begin{cases} x(t)=0 & x'(t)=0 & \\ y(t)=-2t+2 & y'(t)=-2 & t\in[0,1] \\ z(t)=3t & z'(t)=3 & \end{cases}$$
$$CA:\begin{cases} x(t)=2t & x'(t)=2 & \\ y(t)=0 & y'(t)=0 & t\in[0,1] \\ z(t)=-3t+3 & z'(t)=-3 & \end{cases}$$

$$l(\text{perímetro})=\int_{AB+BC+CA} ds=\int_0^1\left(\sqrt{4+4}+\sqrt{4+9}+\sqrt{4+9}\right)dt=$$
$$=\sqrt{8}+2\sqrt{13}=10.04\text{ u.l.}$$

Teorema 33 *La longitud de una curva diferenciable es independiente de la parametrización elegida.*

9.3. INTEGRALES DE CAMINO

Calcular la longitud de una curva puede verse como el cálculo del camino recorrido por una partícula que se mueve a lo largo de esa curva. El vector de posición de la partícula en cada momento viene dado por $\vec{r}(t)$, donde t se considera el tiempo. En este sentido $\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}$ o $\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}$ representa la velocidad con que se mueve la partícula (en el plano o en el espacio) y la integral $l(C)=\int_a^b v(t)dt$ nos da el espacio recorrido. En este caso, esta integral es independiente del sentido en que se recorre la curva. Por contra, las integrales de línea sí que tienen en cuenta este sentido, ya que aparecen los campos vectoriales.

Las integrales de camino y de línea son una forma de generalizar las integrales de una variable a funciones de más variables.

Definición 35 *Dada una función $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ se define la integral de f a través del camino dado por $\vec{r}(t):[a,b]\to\mathbf{R}^3$, donde $\vec{r}(t)$ es diferenciable y con primera derivada continua, y donde la función compuesta $f(x(t),y(t),z(t))$ es continua sobre $[a,b]$, como*

$$\int_C f ds=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\left\|\vec{r}'(t)\right\|dt$$

siendo C la curva correspondiente al camino $\vec{r}(t)$.

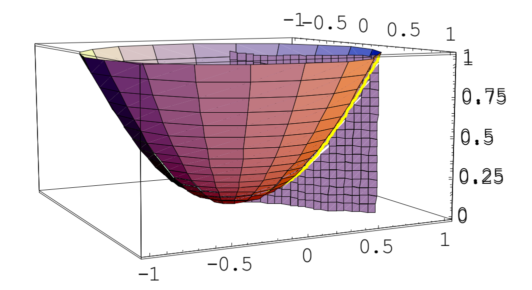
Si se considera un camino en el plano, la integral anterior puede reescribirse como

$$\int_C f ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \left\| \vec{r}'(t) \right\| dt \tag{9.1}$$

Si $f(x, y) \geq 0$, la integral (9.1) tiene una intepretación geométrica sencilla, ya que representa el área de la superficie lateral que se puede construir sobre la curva C y cuya altura es $f(x, y)$.

$$\text{área lateral} = \int_C f ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \tag{9.2}$$

Ejemplo 9.9 *Calcular el área lateral de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre la curva $x = y$ en el intervalo* $[0, 1]$

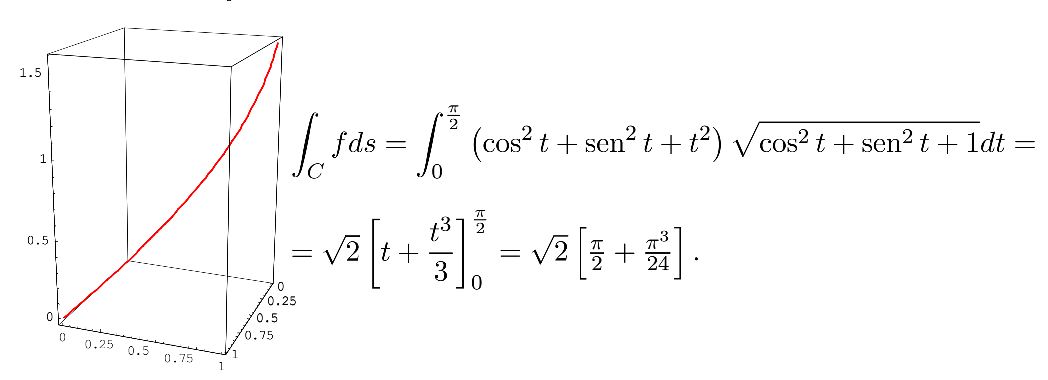


$$C : \left\{ \begin{array}{ccc} \vec{r}: & [0,1] & \to & \mathbf{R}^2 \\ & t & \to & (t,t) \end{array} \right. \left| \begin{array}{ll} x(t) = t, & x'(t) = 1 \\ y(t) = t, & y'(t) = 1 \end{array} \right.$$

$$\textit{área lateral} = \int_C f ds = \int_0^1 \left(t^2 + t^2\right) \sqrt{1+1} dt = 2\sqrt{2} \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \; u.a.$$

Ejemplo 9.10 *Calcular la integral de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ a través del camino $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ en el intervalo* $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Solución Dibujemos la curva:



$$\int_C f ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + t^2\right) \sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + 1} dt =$$

$$= \sqrt{2} \left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^3}{24}\right].$$

9.4. INTEGRALES DE LÍNEA

9.4.1. Campos vectoriales

Definición 36 *Un **campo vectorial** $\vec{F}$ es una aplicación $\vec{F} : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ (consideraremos sólo $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$) que a cada punto $\vec{x} \in A$ le asocia el vector $\vec{F}(\vec{x})$.*

Definición 37 *Un* ***campo vectorial gradiente*** $\vec{F}$ *es el gradiente de una cierta función escalar* f*:*

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{\nabla} f(x, y, z)$$

9.4.2. Integrales de línea

Definición 38 *En el caso de campos vectoriales que son continuos sobre el camino* $\vec{r}(t) : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ *donde* $\vec{r}(t)$ *es diferenciable y con primera derivada continua y donde la función* $\vec{F}(x(t), y(t), z(t))$ *es continua sobre* $[a, b]$ *se define la integral de línea de* $\vec{F}$ *a lo largo de* $\vec{r}(t)$ *como*

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

y se conoce como el ***trabajo*** *realizado por el campo* $\vec{F}$ *a lo largo del camino* C*.*

Dado que aparece el producto escalar de dos vectores, estas integrales **dependen del sentido del recorrido del camino.**

En resumen, *las integrales de camino son independientes de la parametrización elegida mientras que las de línea dependen de sí la parametrización mantiene o no el sentido de recorrido.*

Ejemplo 9.11 *Una partícula se desplaza en el campo de fuerzas*

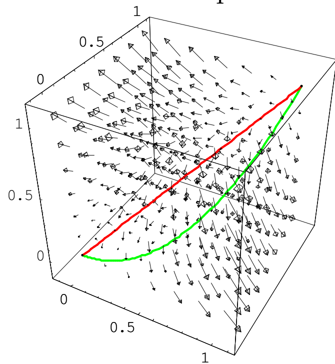
$$\vec{F}(x, y, z) = \left(x^2 - y, y^2 - z, z^2 - x\right)$$

desde el origen al punto $A(1, 1, 1)$

1. *a lo largo de la recta* OA
2. *a lo largo de la curva* $C : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$

Calcular el trabajo realizado en cada caso.

Solución. Se puede observar el campo vectorial y los dos caminos en la figura:



1) La parametrización elegida de la recta OA es;

$x = t, \quad y = t, \quad z = t, \; 0 \leq t \leq 1$

$$W = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^1 \left(t^2 - t, t^2 - t, t^2 - t\right) \cdot (1, 1, 1) \, dt =$$

$$= \int_0^1 3\left(t^2 - t\right) dt = -\frac{1}{2} \text{ unidades de trabajo.}$$

2) $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left(0, t^4 - t^3, t^6 - t\right) \cdot \left(1, 2t, 3t^3\right) dt =$

$$= \int_0^1 \left(2t^5 - 2t^4 + 3t^8 - 3t^3\right) dt = -\frac{29}{60} \text{ u.t.}$$

9.5. CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS E INDEPENDENCIA DEL CAMINO

Bajo ciertas condiciones la integral de línea entre dos puntos A y B es independiente de la trayectoria que une esos puntos. Esto sucede cuando el campo de fuerzas $\vec{F}$ es un campo gradiente. Se dice que estos campos son **conservativos** ya que se cumple que el trabajo realizado por ellos es independiente del camino:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A)$$

Ejemplo 9.12 *Comprobar que el campo* $\vec{F}(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$ *es un campo conservativo y calcular el trabajo que se realiza para ir desde el origen al punto* $(1,1,1)$ *a lo largo de una recta y a lo largo de la curva* $C : \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{array} \right.$.

Solución. $\vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{dx}, \frac{\partial f}{dy}, \frac{\partial f}{dz}\right) = (2x, 2y, 2z)$

$$\left. \begin{array}{|lll} \frac{\partial f}{dx} = 2x & \Rightarrow & f = \int 2x dx = x^2 + g_1(y,z) \\ \frac{\partial f}{dy} = 2y & \Rightarrow & f = \int 2y dy = y^2 + g_2(x,z) \\ \frac{\partial f}{dz} = 2z & \Rightarrow & f = \int 2z dz = z^2 + g_3(x,y) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \vec{F}$ es conservativo $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A) = 3$ u.t.

La forma de comprobar que un campo es conservativo proviene de la condición de que se debe obtener una diferencial exacta al calcular la diferencial del trabajo, $\vec{F} \cdot d\vec{r}$. Por tanto, en el caso bidimensional donde $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j}$, $\vec{F} \cdot d\vec{r} = Mdx + Ndy = \frac{\partial f}{dx} dx + \frac{\partial f}{dy} dy = df$, la condición se puede resumir en:

Teorema 34 $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j}$ *es un campo conservativo si*

$$\frac{\partial N}{dx} = \frac{\partial M}{dy}.$$

En el caso tridimensional $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ daría lugar a $\vec{F} \cdot d\vec{r} = Mdx + Ndy + Pdz = \frac{\partial f}{dx} dx + \frac{\partial f}{dy} dy + \frac{\partial f}{dz} dz = df$ y, por tanto,

Teorema 35 $\vec{F} = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ *es un campo conservativo si*

$$\frac{\partial N}{dx} = \frac{\partial M}{dy}, \qquad \frac{\partial P}{dx} = \frac{\partial M}{dz}, \qquad \frac{\partial N}{dz} = \frac{\partial P}{dy}.$$

Ejemplo 9.13 *Sea* $\vec{F}(x,y,z) = (e^x \cos y + yz, xz - e^x \operatorname{sen} y, xy + z)$. *Comprobar si es un campo conservativo y, en su caso, calcular* f.

Solución. Veamos primero si es conservativo:

$$\left| \begin{array}{lll} \dfrac{\partial N}{dx} = \dfrac{\partial M}{dy} & \dfrac{\partial P}{dx} = \dfrac{\partial M}{dz} & \dfrac{\partial N}{dz} = \dfrac{\partial P}{dy} \\ \dfrac{\partial N}{dx} = -e^x \operatorname{sen} y + z & \dfrac{\partial P}{dx} = y & \dfrac{\partial N}{dz} = x \\ \dfrac{\partial M}{dy} = -e^x \operatorname{sen} y + z & \dfrac{\partial M}{dz} = y & \dfrac{\partial P}{dy} = x \end{array} \right|,$$

luego es un campo conservativo.

$$\left. \begin{array}{l} M = \dfrac{\partial f}{dx} \quad \Rightarrow \quad f = \displaystyle\int (e^x \cos y + yz)\, dx = e^x \cos y + yzx + g_1(y,z) \\ N = \dfrac{\partial f}{dy} \quad \Rightarrow \quad f = \displaystyle\int (xz - e^x \operatorname{sen} y)\, dy = yzx + e^x \cos y + g_2(x,z) \\ P = \dfrac{\partial f}{dz} \quad \Rightarrow \quad f = \displaystyle\int (xy + z)\, dz = yzx + \dfrac{z^2}{2} + g_3(x,y) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$f(x,y,z) = yzx + e^x \cos y + \frac{z^2}{2}$$

9.6. EL TEOREMA DE GREEN

El teorema de Green relaciona integrales de camino a través de caminos cerrados con integrales dobles.

Teorema 36 (de Green) *Sea* C *una curva cerrada simple del plano* xy *tal que una recta paralela a cualquier eje la corta a lo sumo en dos puntos. Sean* M, N, $\frac{\partial N}{dx}$, $\frac{\partial M}{dy}$ *funciones continuas. Sea* R *la región delimitada por* C. *Entonces*

$$\oint_C (Mdx + Ndy) = \iint_R \left(\frac{\partial N}{dx} - \frac{\partial M}{dy} \right) dxdy$$

donde la orientación de C *es antihoraria.*

Corolario 5 *Sea* C *es una curva cerrada simple tal que una recta paralela a cualquiera de los ejes la corta en un máximo de dos puntos, entonces el área encerrada por* C *es*

$$\acute{A}rea = \frac{1}{2} \oint_C (xdy - ydx)$$

Ejemplo 9.14 *Comprobar el teorema de Green siendo* $C : x^2 + y^2 = 4$, $M = -x^2 y$, $N = xy^2$.

Solución. La parametrización de la curva C es:

$$\left| \begin{array}{ll} x = 2\cos t, & dx = -2\operatorname{sen} t dt \\ y = 2\operatorname{sen} t, & dy = 2\cos t dt \end{array} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \right|$$

$$\oint_C (Mdx + Ndy) = \int_0^{2\pi} (-4\cos^2 t \cdot 2\operatorname{sen} t \cdot (-2)\operatorname{sen} t +$$
$$+2\cos t \cdot 4\operatorname{sen}^2 t \cdot 2\cos t)dt = 8\pi$$

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{dx} - \frac{\partial M}{dy} \right) dxdy = \iint_R \left(x^2 + y^2\right) dxdy \overset{\text{polares}}{=}$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \cdot r dr d\theta = 8\pi$$

Ejemplo 9.15 *Aplicar el teorema de Green para calcular el área comprendida entre la elipse $x = 3\cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$ y el círculo de radio unidad*

Solución. Parametrización de la elipse:

$$\left| \begin{array}{ll} x = 3\cos t, & dx = -3\operatorname{sen} t dt \\ y = 2\operatorname{sen} t, & dy = 2\cos t dt \end{array} \right| \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Área elipse$= \frac{1}{2} \oint_C (xdy - ydx) == \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (3\cos t\ 2\cos t + 2\operatorname{sen} t\ 3\operatorname{sen} t)\, dt =$
$= 6\pi$ u.a.

Parametrización del círculo:

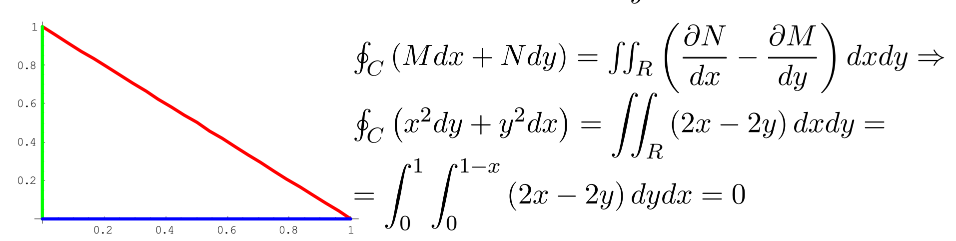
$$\left| \begin{array}{ll} x = \cos t, & dx = -\operatorname{sen} t dt \\ y = \operatorname{sen} t, & dy = \cos t dt \end{array} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \right|$$

Área círculo$= \frac{1}{2} \oint_C (xdy - ydx) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t\right) dt = \pi$ u.a.

Por tanto, área encerrada $= 5\pi$ u.a.

Ejemplo 9.16 *Aplicar el teorema de Green para calcular $\oint_C \left(x^2 dy + y^2 dx\right)$ siendo C el triángulo acotado por las rectas $x = 0$, $x + y = 1$, $y = 0$.*

Solución. $M = y^2$, $N = x^2 \Rightarrow \dfrac{\partial N}{dx} = 2x$, $\dfrac{\partial M}{dy} = 2y$



$$\oint_C (Mdx + Ndy) = \iint_R \left(\frac{\partial N}{dx} - \frac{\partial M}{dy} \right) dxdy \Rightarrow$$
$$\oint_C \left(x^2 dy + y^2 dx\right) = \iint_R (2x - 2y)\, dxdy =$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (2x - 2y)\, dydx = 0$$

IV ECUACIONES DIFERENCIALES

TEMA 10

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

10.1. INTRODUCCIÓN Y DEFINICIONES

Una ecuación diferencial es la que incluye una o más derivadas o diferenciales. Se clasifican por su:

- **tipo**: ecuaciones ordinarias o en derivadas parciales.
- **orden**: la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.
- **grado**: el exponente de la máxima potencia de la derivada de mayor orden, después de haber eliminado en la ecuación las fracciones y los radicales en la variable dependiente y sus derivadas.

Ejemplo 10.1 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y^2x^2 = \dfrac{\partial y}{\partial t}$. *Ecuación en derivadas parciales, de segundo orden y primer grado.*

Ejemplo 10.2 $\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^5 + y^2 = e^x$. *Ecuación ordinaria de orden 3 y grado 2.*

Estudiaremos sólo las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Las ecuaciones diferenciales aparecen de manera natural al modelizar muchos fenómenos físicos, químicos, genéticos, económicos, etc. Los veremos en las aplicaciones que aparecen en los problemas.

Este tema lo dedicaremos a las ecuaciones ordinarias de primer orden y los métodos más usuales que se usan para resolverlas.

10.2. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

10.2.1. Ecuaciones separables

Una ecuación de primer orden puede resolverse fácilmente por integración si se pueden agrupar por un lado todos los términos que lleven x y por otro los que lleven y, en este caso:

$$f(y)dy + g(x)dx = 0 \Rightarrow \int f(y)dy + \int g(x)dx = C$$

Ejemplo 10.3 *Resolver la ecuación* $(x+1)\frac{dy}{dx} = x\left(y^2+1\right)$

Solución. $\frac{dy}{y^2+1} = \frac{x}{x+1}dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2+1} = \int \frac{x}{x+1}dx \Rightarrow$

$\arctan y = x - \log|x+1| + C$

Ejemplo 10.4 *Resolver la ecuación* $x(2y-3)\,dx + \left(x^2+1\right)dy = 0.$

Solución. $-\frac{dy}{2y-3} = \frac{x}{x^2+1}dx \Rightarrow \int -\frac{dy}{2y-3} = \int \frac{x}{x^2+1}dx \Rightarrow$

$-\frac{1}{2}\log|2y-3| = \frac{1}{2}\log\left|x^2+1\right| + C' \Rightarrow x^2+1 = \frac{C}{2y-3}$

10.2.2. Ecuaciones exactas. Criterio de exactitud

Una ecuación que puede escribirse de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

se dice que es exacta si $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ya que entonces el primer término de la igualdad es una diferencial exacta

$$df = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

La solución, entonces, vendrá dada por la función $f = \textit{constante}$.

Ejemplo 10.5 *Resolver la ecuación* $(x+y)\,dx + \left(x+y^2\right)dy = 0.$

Solución. $M = x+y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \Rightarrow M = \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow f = \int (x+y)\,dx =$
$= x^2 + xy + g_1(y)$
$N = x+y^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \Rightarrow N = \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow f = \int \left(x+y^2\right)dx =$
$= xy + \frac{1}{3}y^3 + g_2(x) \Rightarrow f(x,y) = x^2 + xy + \frac{1}{3}y^3.$

Por tanto, la solución de la ecuación diferencial será:

$x^2 + xy + \frac{1}{3}y^3 = C$

10.2.3. Ecuaciones diferenciales lineales

Una ecuación lineal de primer orden se puede escribir de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Un método de resolución consiste en multiplicarla por una función $\mu(x)$ que la transforme en una ecuación exacta:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x) \Rightarrow \mu(x)\,dy + \mu(x)\left[P(x)y - Q(x)\right]dx = 0.$$

Para que esta ecuación sea exacta se debe cumplir:

$$\left.\begin{array}{l} N=\mu(x) \\ M=\mu(x)\left[P(x)y-Q(x)\right] \end{array}\right| \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial N}{\partial x}=\mu'(x) \\ \dfrac{\partial M}{\partial y}=\mu(x)\,P(x) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu(x)}{dx}=\mu(x)\,P(x) \Rightarrow \mu(x)=\exp\left[\int P(x)dx\right].$$

Ejemplo 10.6 *Resolver la ecuación* $\dfrac{dy}{dx}+2y=e^{-x}$

Solución. $\mu(x)=\exp\left[\int P(x)dx\right]=\exp\left[\int 2dx\right]=e^{2x}\Rightarrow$

$e^{2x}\dfrac{dy}{dx}+2ye^{2x}=e^{x}\Rightarrow\dfrac{d}{dx}\left(ye^{2x}\right)=e^{x}$

$\Rightarrow ye^{2x}=\displaystyle\int e^{x}dx=e^{x}+C\Rightarrow y=e^{-x}+Ce^{-2x}$

Ejemplo 10.7 *Resolver la ecuación* $2\dfrac{dy}{dx}-y=e^{x/2}$

Solución. $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{2}=\frac{1}{2}e^{x/2}$

$\mu(x)=\exp\left[\int P(x)dx\right]=\exp\left[\int -\frac{1}{2}dx\right]=e^{-x/2}\Rightarrow$

$e^{-x/2}\dfrac{dy}{dx}+2ye^{-x/2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{d}{dx}\left(ye^{-x/2}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow ye^{-x/2}=\displaystyle\int\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}x+C\Rightarrow y=\frac{1}{2}xe^{x/2}+Ce^{x/2}$

10.3. TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES

Teorema 37 (de existencia y unicidad de las soluciones) *Dada la ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

que satisface la condición inicial $y(x_0)=y_0$*. Si* $f(x,y)$ *y* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *son continuas en una región* $R\subset\mathbf{R}^2$ *que contiene al punto* (x_0,y_0)*. Entonces el problema de valor inicial tiene una solución única en un entorno de* x_0*,* $x_0-h<x<x_0+h$*.*

Este teorema nos dice dos cosas importantes. En primer lugar, si se satisfacen las hipótesis el teorema asegura que existe la solución, y en segundo lugar que esa solución es única en un entorno de x_0, aunque no nos dice cómo es de grande este entorno. Gráficamente lo que nos dice el teorema es que hay una única curva que es solución de la ecuación diferencial y que pasa por el punto (x_0,y_0).

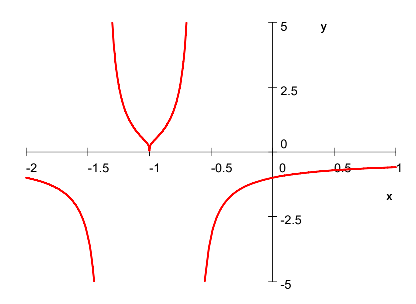
Ejemplo 10.8 *Resolver el problema de valor inicial dado*

$$(x+1)\frac{dy}{dx}=y^2,\quad y(0)=-1$$

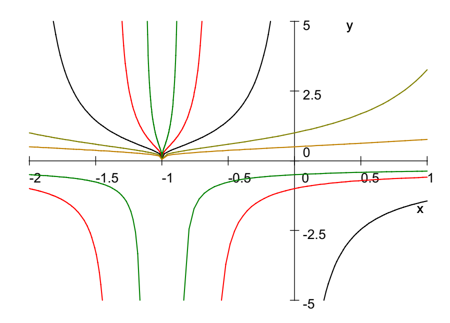
Solución. $\dfrac{dy}{y^2} = \dfrac{1}{x+1}dx \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{dy}{y^2} = \int \dfrac{1}{x+1}dx \Rightarrow$
$\dfrac{-1}{y} = \ln|x+1| + C \Rightarrow 1 = C$
La solución es

$$\frac{-1}{y} = \ln|(x+1)| + 1 \Rightarrow y = \frac{-1}{\ln|x+1|+1}$$

Gráficamente se obtiene la curva solución de la ecuación diferencial que pasa por el punto $(0, -1)$



Se pueden dibujar varias soluciones de la ecuación diferencial, las dadas por $y = \dfrac{-1}{C + \ln|(x+1)|}$, para distintos valores de C :



donde se observa que una de ellas (en rojo) es la obtenida anteriormente. También se observa que las curvas solución, para distintos valores de la constante, recubren todo el plano.

10.4. APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

Las ecuaciones diferenciales aparecen siempre que exista algún tipo de cambio que se quiere medir. Se estudiarán algunos de los modelos que utilizan ecuaciones diferenciales de primer orden. En particular veremos que los modelos radiactivos están basados en este tipo de ecuaciones. Estos modelos se usan para determinar la variación de las cantidades de los elementos radiactivos a lo largo del tiempo. El más espectacular es el que permite medir las edades de los fósiles basándose en el Carbono-14. También se estudiarán problemas de crecimiento de poblaciones.

10.4.1. Problemas de mezclas

Para resolver este tipo de problemas, el primer paso consiste en definir correctamente las variables. En general se define:

$x(t)$: cantidad de sal que hay en el tanque en un instante t (en unidades de masa).

Ejemplo 10.9 *Considérese un depósito grande que contiene 1000 litros de agua, dentro del cual empieza a fluir una solución salada de salmuera a una velocidad de 6 l/min. La solución dentro del depósito se mantiene bien agitada y fluye hacia el exterior a una velocidad de 5 l/min. Si la concentración de sal en la salmuera que entra en el depósito es de 1 g/l, determinar la concentración de sal en el tanque en función del tiempo.*

Solución. $x(t)$: cantidad de sal que hay en el tanque en un instante t (en g).

Al estudiar la variación de esta variable por unidad de tiempo, se obtiene la ecuación que se ha de resolver:

$$\frac{dx}{dt} = 6\,(l/\,\text{mín})\,1\,(g/l) - 5\,(l/\,\text{mín})\,\frac{x\,(g)}{(1000+t)\,(l)},$$

con la condición inicial $x(0) = 0$,

$$\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{5x}{1000+t} \Rightarrow \frac{dx}{dt} + \frac{5x}{1000+t} = 6 \Rightarrow$$

$$\mu(x) = \exp\int \frac{5}{1000+t}dt = \exp 5\log(1000+t) = (1000+t)^5 \Rightarrow$$

$$x(1000+t)^5 = \int 6\,(1000+t)^5\,dt = (1000+t)^6 + C \Rightarrow$$

$$x(t) = (1000+t) + \tfrac{C}{(1000+t)^5}.$$

Para que se cumpla la condición inicial:

$$x(0) = 0 = 1000 + \tfrac{C}{1000^5} \Rightarrow C = -1000^6 \Rightarrow$$

$$x(t) = (1000+t) - \frac{1000^6}{(1000+t)^5}.$$

Ejemplo 10.10 *Se disuelve inicialmente 50 gr de sal en un tanque que contiene 300 litros de agua. Se bombea una solución salada de salmuera a razón de 3 litros por minuto, dicha solución, que se mantiene convenientemente agitada, sale del tanque a razón de 3 litros por minuto. Si la concentración de la solución que entra es de 2 gr por litro, determinar la cantidad de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera. ¿Cuándo se alcanzará la máxima concentración?*

Solución. $x(t)$: cantidad de sal que hay en el tanque en un instante t (en g).

$\dfrac{dx}{dt} = 3\,(l/\,\text{mín})\,2\,(g/l) - 3\,(l/\,\text{mín})\,\dfrac{x\,(kg)}{300\,(l)}$, con la condición inicial $x(0) = 50$,

$$\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{3x}{300} \Rightarrow \frac{dx}{dt} + \frac{3x}{300} = 6 \Rightarrow$$

$$\mu(x) = \exp\int \frac{3}{300}dt = \exp(0{,}01t) \Rightarrow$$

$$x\exp(0{,}01t) = \int \exp(0{,}01t)\,dt = 100\exp(0{,}01t) + C \Rightarrow x(t) = 100 + C\exp(-0{,}01t).$$

Para que se cumpla la condición inicial

$$x(0) = 50 = 100 + C \Rightarrow C = -50 \Rightarrow x(t) = 100 - 50\exp(-0{,}01t),$$

Para que se alacance la concentración máxima, se considera $t \to \infty \Rightarrow x(t) = 100g$.

Dado que el volumen del tanque son 300 l, la concentración de sal en el tanque será $c(t) = \frac{1}{3}(g/l)$.

10.4.2. Problemas de llenado de tanques

Ejercicio 10.1 *Un tanque suministra agua a una bomba. El agua entra al tanque a través de una tubería de 8 cm de diámetro con un flujo constante de 35 litros/s y sale para alimentar a una bomba por otra tubería del mismo diámetro. El diámetro del tanque es de 5 m. A 1 m del fondo del tanque se situa una tubería empleada de rebosadero, de 5 cm de diámetro. La velocidad* $v(m/s)$ *del agua que sale hacia la bomba varía con el nivel del agua,* $h(m)$*, en el tanque de acuerdo con la ecuación* $v = 4{,}505\sqrt{h}$*. Determínese:*

1. *¿Cuánto tiempo se necesitará para que el tanque, inicialmente vacío, alcance el estado estacionario, es decir, alcance la tubería que actua de rebosadero?*
2. *En dicho estado, calcúlese la cantidad de agua, en litros/s, que abandona el tanque por la tubería que hace de rebosadero.*

10.4.3. Desintegración radiactiva

Se llama vida media a una medida de la estabilidad de una sustancia radiactiva. La vida media es simplemente el tiempo necesario para que se desintegren la mitad de los núcleos de una cantidad inicial A_o. Cuanto más larga es la vida media de un elemento tanto más estable es. Por ejemplo, la vida media del radio (elemento altamente radiactivo) es de aproximadamente 1700 años, mientras que el isótopo de uranio que más conmumente aparece, el U-238, tiene una vida media de cerca de 4500 millones de años.

Ejemplo 10.11 *Un reactor nuclear transforma el uranio 238, que es relativamente estable, en el isótopo Plutonio 239. Después de 15 años se determina que el 0.043 % de la cantidad inicial* A_o *de plutonio se ha desintegrado. Determinar el periodo de semidesintegración de este isótopo si la velocidad de desintegración es proporcional a la cantidad restante.*

Solución. $x(t)$: cantidad de plutonio que hay en un instante t.

$\frac{dx}{dt} = -\lambda x$, con la condición inicial $x(0) = A_o$, $x(15) = 0{,}00043 A_o \Rightarrow$

$\frac{dx}{x} = -\lambda dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int -\lambda dt \Rightarrow \log x = -\lambda t + c \Rightarrow$

$|x(t)| = \exp(-\lambda t + c) \Rightarrow x(t) = C \exp(-\lambda t)$.

Aplicando las condiciones iniciales se obtiene el valor de las constantes:

$x(0) = A_o = C$, $x(15) = 0{,}00043 A_o = A_o \exp(15\lambda) \Rightarrow 0{,}00043 = \exp(-15\lambda)$

$\Rightarrow -15\lambda = \log 0{,}00043 = -7.\,751\,7 \Rightarrow \lambda = \frac{7.\,751\,7}{15} = 0{,}516\,78$ (años^{-1}).

Por tanto, la constante de desintegración del plutonio 239 es $\lambda = 0{,}516\,78$.

El periodo de semidesintegración, τ, de un elemento es el tiempo que tarda dicho elemento en reducir su masa a la mitad. En consecuencia:

$x(\tau) = \frac{A_o}{2} \Rightarrow x(\tau) = \frac{A_o}{2} = A_o \exp(-\lambda\tau) \Rightarrow \exp(-\lambda\tau) = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow -\lambda\tau = \log\dfrac{1}{2} \Rightarrow \tau = \dfrac{\log 2}{\lambda}.$

Lo que implica que la vida media del plutonio 239 es:

$$\tau = \frac{\log 2}{0{,}516\,78} = 1.\,341\,3 \text{ años.}$$

10.4.4. Determinación de edades por el método del Carbono 14.

Alrededor de 1950, el químico Willard Libby ideó un método en el cual se usa carbono radiactivo para determinar la edad de los fósiles. La teoría se basa en que el isótopo Carbono 14 se produce en la atmósfera por la acción de la radiación cósmica sobre el nitrógeno. El cociente de la cantidad de C-14 y la cantidad de carbono ordinario (C-12) presentes en la atmósfera es constante y, en consecuencia, la proporción de isótopo presente en los organismos vivos es la misma que en la atmósfera. Cuando un organismo muere, la absorción del C-14 cesa. Así, comparando la proporción de C-14 que hay en un fósil con la proporción constante encontrada en la atmósfera es posible obtener una estimación razonable de su edad. El método se basa en que el período de semidesintegración del C-14 es de aproximadamente 5600 años. Por su trabajo, Libby ganó el premio Nobel de Química en 1960. El método de Libby ha sido utilizado para determinar la antigüedad del mobiliario de madera hallado en las tumbas egipcias, así como la de las envolturas de lienzo de los manuscritos del Mar Muerto.

Ejemplo 10.12 *Se ha encontrado que un hueso fosilizado contiene 1/1000 de la cantidad original de C-14. Determinar la edad del fósil.*

Solución. $x(t)$: cantidad de carbono 14 que hay en el hueso en un instante t.
Del problema anterior se obtiene:

$\dfrac{dx}{dt} = -\lambda x$, con la condición inicial $x(0) = A_o \Rightarrow x(t) = A_o \exp(-\lambda t)$

y sabemos que la constante $\lambda = \dfrac{\log 2}{\tau} = \frac{\log 2}{5600} = 1.\,237\,8 \times 10^{-4}$ años^{-1}.

Por tanto, si $x(t) = 0{,}001 A_o = A_o \exp\left(-1.\,237\,8 \times 10^{-4} t\right) \Rightarrow$

$0{,}001 = \exp\left(-1.\,237\,8 \times 10^{-4} t\right)$

$\Rightarrow -1.\,237\,8 \times 10^{-4} t = \log 0{,}001 = -6.\,907\,8 \Rightarrow$

$t = \dfrac{6.\,907\,8}{1.\,237\,8 \times 10^{-4}} = 55807$ años.

10.4.5. Crecimiento de poblaciones

Ejemplo 10.13 *Supóngase que un estudiante portador de un virus de gripe regresa a un campus universitario aislado que tiene 1000 estudiantes. Si se supone que la rapidez con la que el virus se propaga es proporcional no sólo al número x de estudiantes contagiados, sino también al número de alumnos no contagiados, determinar el número de estudiantes contagiados después de 6 días, si además se observa que después de 4 días $x(4) = 50$.*

Solución. $x(t)$: número de estudiantes contagiados en un instante t (días).

$\dfrac{dx}{dt} = kx(1000 - x)$, con las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $x(4) = 50$.

$\dfrac{dx}{x(1000 - x)} = kdt \Rightarrow \int \dfrac{dx}{x(1000 - x)} = \int kdt \Rightarrow \frac{1}{1000} \ln \left| \dfrac{x}{(x - 1000)} \right| = kt + c$

$\Rightarrow \ln \left| \dfrac{x}{(x - 1000)} \right| = 1000(kt + c) \Rightarrow \dfrac{x}{(x - 1000)} = C \exp(1000kt)$.

Sustituyendo las condiciones iniciales

$x(0) = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{-999} = C$, $x(4) = 50 \Rightarrow \dfrac{50}{-950} = \dfrac{1}{-999} \exp(4000k)$

$\Rightarrow \dfrac{999 \cdot 50}{950} = \exp(4000k) \Rightarrow 4000k = \log \dfrac{999 \cdot 50}{950} = 3.9623 \Rightarrow$

$k = \dfrac{3.9623}{4000} = 9.9058 \times 10^{-4}$.

$\Rightarrow \dfrac{x}{(x - 1000)} = \dfrac{-1}{999} \exp\left(1000 \cdot 9.9058 \times 10^{-4} t\right) = \dfrac{-1}{999} \exp(0{,}99058t)$.

Al cabo de seis días

$\dfrac{x}{(x - 1000)} = \dfrac{-1}{999} \exp(0{,}99058 \cdot 6) = -0{,}38164 \Rightarrow$

$x = -0{,}38164(x - 1000) = 381.64 - 0{,}38164x \Rightarrow$

$x = 381.64 - 0{,}38164x \Rightarrow x(6) = 276.22$

Al cabo de seis días habrá, aproximadamente, 276 estudiantes con gripe. ■

Ejemplo 10.14 *La tasa de crecimiento de una población de moscas de la fruta (también llamadas moscas del Mediterráneo) en un instante dado es proporcional al tamaño de la población en dicho instante. Supongamos que se realiza cierto experimento con una población inicial de moscas y se observa su evolución. Si hay 180 moscas tras el segundo día y 300 después del cuarto, ¿cuántas había originalmente en la muestra? ¿Y al cabo de 10 días?*

Ejercicio 10.2 *Al observar el aumento se les restringe la comida a partir del cuarto día para que haya una tasa de mortalidad en cada instante proporcional al cuadrado de la población en ese instante. ¿Cuál sería la nueva ecuación que modeliza la evolución de la población? ¿Cuál será la población al cabo de 10 días si en el quinto hay 340 moscas?*

Solución. $x(t)$: número de moscas de la fruta en un instante t (días).

$\dfrac{dx}{dt} = kx$, con las condiciones iniciales $x(2) = 180$, $x(4) = 300$.

De los problemas anteriores sabemos que $x(t) = A_o \exp(kt)$, siendo A_0 el número de moscas que hay inicialmente.

Sustituyendo los datos de este problema se obtiene:

$x(2) = 180 = A_o \exp(2k)$, $x(4) = 300 = A_o \exp(4k)$.

Dividiendo ambas ecuaciones:

$\frac{300}{180} = \dfrac{A_o \exp(4k)}{A_o \exp(2k)} = \exp(2k) \Rightarrow \exp(2k) = 1.6667 \Rightarrow$

$k = \frac{1}{2} \log 1.6667 = 0{,}25542$.

Sustituyendo en una de ellas:

$180 = A_o \exp(2 \cdot 0{,}25542) = A_o \cdot 1.6667 \Rightarrow A_o = \frac{180}{1.6667} = 108$

Inicialmente había 108 moscas de la fruta. Al cabo de díez días

$x(10) = 108 \exp(0{,}255\,42 \cdot 10) = 1389.$

Cuando se les restringe la comida consideramos que es para $t = 0$, por lo que en ese momento habrá 300 moscas. La ecuación de evolución será:

$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2$, que se puede reescribir en términos de una única constante:

$\frac{dx}{dt} = x - ax^2$

La condición inicial es $x(0) = 300$ y $x(1) = 340$, ya que el quinto día será el primero con la nueva forma de contar. Se resuelve la ecuación:

$\frac{dx}{x(1-ax)} = kdt \Rightarrow \int \frac{dx}{x(1-ax)} = \int dt \Rightarrow \ln x - \ln \frac{1}{a}(ax-1) = t + c$

$\Rightarrow \ln \left| \frac{ax}{ax-1} \right| = t + c \Rightarrow \frac{ax}{ax-1} = C \exp(t).$

Sustituyendo las condiciones iniciales:

$\frac{300a}{300a-1} = C,\ \frac{340a}{340a-1} = \frac{300a}{300a-1} \exp 1 \Rightarrow$

$a = 0{,}002\,713\,0,\ C = -4.\,373\,5$

La solución es:

$x(t) = C \frac{e^t}{a - Cae^t} = 4.\,373\,5 \frac{e^t}{0{,}002\,713\,0 + 0{,}012e^t}$

Al cabo de díez días, que será el sexto en este modelo, el número de moscas será:

$x(6) = 4.\,373\,5 \frac{e^6}{0{,}002\,713\,0 + 0{,}012e^6} = 364.\,25.$

Al restringirles la comida las moscas no crecen tan rápido.

10.5. MÉTODOS NUMÉRICOS DE RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

A pesar de que los teoremas de existencia y unicidad no nos dicen cómo calcular las soluciones, existen algunos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden que sabemos resolver, a saber, ecuaciones separables, exactas, lineales, homógeneas, etc.

Aun así, la mayoría de las ecuaciones diferenciales no se pueden resolver ni explícita ni implícitamente. Por ello, es necesario recurrir a métodos numéricos para obtener una aproximación de la solución de un problema de valor inicial. Aquí analizaremos el método de Euler.

Supongamos que tenemos el problema de valor inicial

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

y queremos obtener una aproximación en el intervalo $[a, b]$, siendo $a = x_0$.

El **método de Euler** consiste en tomar las fórmulas recursivas

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i-1} + h \\ y_i &= y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}) \end{aligned}$$

siendo $h = (b-a)/n$ (tamaño de paso), $a = x_0$, $b = x_n$, para $i = 0, 1, \ldots, n$. Si $\phi(x)$ es la solución al problema de valor inicial anterior, entonces

$$y_i \sim \phi(x_i)\ , \quad i = 0, 1, \ldots, n\ .$$

Uniendo los puntos del plano (x_i, y_i) por medio de una poligonal podemos representar gráficamente la aproximación a la solución $\phi(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

Este método no es demasiado preciso a menos que se tome el intervalo h muy pequeño. Métodos más precisos son los conocidos como métodos de Runge-Kutta.

Ejemplo 10.15 *Resuelve la ecuación diferencial*

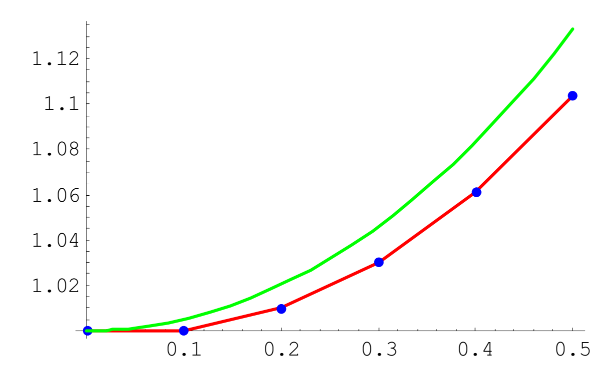
$$\frac{dy}{dx} = yx$$

y dibuja la curva solución que pasa por el punto $y(0) = 1$. *Utiliza el método de Euler para calcular de forma aproximada el valor de la solución en* $x = 0{,}5$, *con tamaño de paso* $h = 0{,}1$.

Solución. $f(x, y) = xy$, si $x = 0$, entonces $y = 1$. Se hace una tabla de valores, aplicando el método de Euler para calcular los puntos:

$x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1,$
$x_1 = x_0 + h = 0{,}1 \Rightarrow y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1 \cdot (0 \cdot 1) = 1,$
$x_2 = x_1 + h = 0{,}2 \Rightarrow y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1 + 0{,}1 \cdot (0{,}1 \cdot 1) = 1.01,$
$x_3 = x_2 + h = 0{,}3 \Rightarrow y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1{,}01 + 0{,}1 \cdot (0{,}2 \cdot 1{,}01) = 1.0302,$
$x_4 = x_3 + h = 0{,}4 \Rightarrow y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = 1.0302 + 0{,}1 \cdot (0{,}3 \cdot 1.0302) = 1.0611,$
$x_5 = x_4 + h = 0{,}5 \Rightarrow y_5 = y_4 + hf(x_4, y_4) = 1.0611 + 0{,}1 \cdot (0{,}4 \cdot 1.0611) = 1.1035.$

Se representan estos puntos, uniéndolos mediante trozos de rectas:



Se obtiene una aproximación de la curva solución de la ecuación diferencial que pasa por el punto $(0, 1)$. La curva solución está dibujada en verde.

TEMA 11

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

11.1. DEFINICIÓN. NOTACIÓN MATRICIAL

En este tema, estudiaremos la resolución de sistemas de ecuaciones lineales ordinarias con coeficientes constantes utilizando métodos provenientes del álgebra lineal.

Un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden está en forma normal cuando se escribe:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + a_{13}x_3(t) + ... + a_{1n}x_n(t) + f_1(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + a_{23}x_3(t) + ... + a_{2n}x_n(t) + f_2(t) \\ &\dots \\ x_n'(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + a_{n3}x_3(t) + ... + a_{nn}x_n(t) + f_n(t) \end{aligned}$$

se puede escribir vectorialmente como:

$$\vec{x}'(t) = \mathbf{A}\vec{x}(t) + \vec{f}(t)$$

Por tanto nos interesan las definiciones de derivada e integral de una matriz:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt}(t_0) &= \mathbf{A}'(t_0) = \left[a_{ij}'(t_0)\right] \\ \int_a^b \mathbf{A}(t)\,dt &= \left[\int_a^b a_{ij}(t)\,dt\right] \end{aligned}$$

y sus propiedades:

1. $\frac{d}{dt}(\mathbf{CA}) = \mathbf{C}\frac{d\mathbf{A}}{dt}$
2. $\frac{d}{dt}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt}$
3. $\frac{d}{dt}(\mathbf{AB}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{B} + \mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{dt}$

Como siempre, nos interesan conocer las condiciones que deben cumplirse para que un sistema de ecuaciones diferenciales tenga solución:

Teorema 38 (existencia y unicidad de soluciones) *Si $\mathbf{A}(t)$ y $\vec{f}(t)$ son continuas en un intervalo abierto I que contiene a t_0. Entonces para todo $\vec{x}_0$ existe una solución única $\vec{x}(t)$ definida en todo el intervalo I del problema de valor inicial*

$$\vec{x}'(t) = \mathbf{A}\vec{x}(t) + \vec{f}(t), \qquad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$$

Un sistema de n ecuaciones lineales se dice que es homogéneo si $\vec{f}(t) = \vec{0}$ y la solución general vendrá dada por una combinación lineal de n soluciones linealmente independientes. Si $\vec{f}(t) \neq \vec{0}$ la solución general será la del sistema homogéneo más una solución particular; veremos más adelante como encontrar esta solución particular en casos sencillos.

Para reconocer si las soluciones son linealmente independientes recurrimos a su determinante:

Teorema 39 *n soluciones son linealmente independientes en I si, y sólo si, su wronskiano en no nulo en I, donde el* wronskiano *se define como*

$$\mathbf{W}\left[\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\right] = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & ... & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & ... & x_{22} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n1} & x_{n2} & ... & x_{nn} \end{vmatrix}, \quad donde \;\; \vec{x}_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ ... \\ x_{ni} \end{pmatrix}$$

Al conjunto de soluciones linealmente independientes $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\}$ en I se le conoce como *conjunto fundamental de soluciones.* Se pueden escribir como columnas de una matriz que se conoce como *matriz fundamental* $\mathbf{X}(t)$, la solución general del sistema de ecuaciones lineales se puede escribir en términos de esta matriz como

$$\vec{x}(t) = \mathbf{X}(t)\vec{c}, \quad \text{donde } \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n \end{pmatrix}$$

$\vec{c}$ es la matriz de constantes.

11.2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Estudiaremos los métodos de resolución de sistemas cuando los coeficientes a_{ij} de la matriz $\mathbf{A}$ son constantes.

11.2.1. Valores propios reales distintos

Teorema 40 *Si una matriz constante* $\mathbf{A}$ *tiene n vectores propios linealmente independientes* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ *correspondientes a n autovalores reales* $\{r_1, r_2, ..., r_n\}$ *entonces un conjunto fundamental de soluciones es*

$$\left\{e^{r_1 t}\vec{u}_1, e^{r_2 t}\vec{u}_2, ..., e^{r_n t}\vec{u}_n\right\}$$

Ejemplo 11.1 *Encontrar la solución general del sistema*

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

Solución. Valores y vectores propios de $\mathbf{A}$:
$\begin{vmatrix} -4-r & 2 \\ 0 & 1-r \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r^2 + 3r - 4 = 0 \Rightarrow r = 1, -4.$

$$r = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow -5x + 2y = 0 \Rightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{x}_1 = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$r = -4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{x}_2 = e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathbf{W}[\vec{x}_1, \vec{x}_2] = \begin{vmatrix} 2e^t & e^{-4t} \\ 5e^t & 0 \end{vmatrix} = -5e^{-3t} \neq 0$ en todos los reales.
La solución general del sistema será:

$$\vec{x}(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + C_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 11.2 *Encontrar la solución general del sistema*

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

Solución. Valores y vectores propios de $\mathbf{A}$:

$$\begin{vmatrix} 1-r & -2 & 2 \\ -2 & 1-r & -2 \\ 2 & -2 & 1-r \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -r^3 + 3r^2 + 9r + 5 = 0$$

$\Rightarrow r = 5, -1$ (doble)

$r = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow x - y + z = 0| \Rightarrow$

$$\left| \begin{array}{l} \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_1 = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_2 = e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$r = 5 \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{array}{r} y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \Bigg| \Rightarrow$

$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_3 = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{W}[\vec{x}_1, \vec{x}_2] = e^{3t} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3e^{3t} \neq 0$ en todos los reales.

La solución general del sistema será:

$$\vec{x}\,(t) = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + C_3 e^{5t}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

11.2.2. Valores propios complejos

Si una matriz con coeficientes reales tiene un valor propio complejo también tiene al conjugado como valor propio, es decir, tendrá dos valores propios de la forma $\alpha \pm i\beta$, por lo que se utilizará la fórmula de Euler y las soluciones se pueden escribir como:

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\,\mathrm{sen}\,\beta x\right)$$
$$e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - i\,\mathrm{sen}\,\beta x\right).$$

Los vectores propios asociados también serán complejo-conjugados de la forma $\vec{a} \pm i\vec{b}$, por tanto, las soluciones asociadas a estos valores podrán ecribirse como:

$$\vec{w}_1 = e^{(\alpha+i\beta)t}\left(\vec{a}+i\vec{b}\right) = e^{\alpha t}\left(\cos\beta t + i\,\mathrm{sen}\,\beta t\right)\left(\vec{a}+i\vec{b}\right) =$$
$$= e^{\alpha t}\left[\left(\vec{a}\cos\beta t - \vec{b}\,\mathrm{sen}\,\beta t\right) + i\left(\vec{b}\cos\beta t + \vec{a}\,\mathrm{sen}\,\beta t\right)\right]$$

$$\vec{w}_2 = e^{(\alpha-i\beta)t}\left(\vec{a}-i\vec{b}\right) = e^{\alpha t}\left(\cos\beta t - i\,\mathrm{sen}\,\beta t\right)\left(\vec{a}-i\vec{b}\right) =$$
$$= e^{\alpha t}\left[\left(\vec{a}\cos\beta t - \vec{b}\,\mathrm{sen}\,\beta t\right) - i\left(\vec{b}\cos\beta t + \vec{a}\,\mathrm{sen}\,\beta t\right)\right]$$

Una combinación lineal de estas soluciones también es solución, por lo que elegimos aquellas combinaciones que eliminan la unidad imaginaria:

$$\vec{x}_1 = \frac{1}{2}\left(\vec{w}_1+\vec{w}_2\right) = e^{\alpha t}\left[\vec{a}\cos\beta t - \vec{b}\,\mathrm{sen}\,\beta t\right]$$
$$\vec{x}_2 = \frac{1}{2i}\left(\vec{w}_1-\vec{w}_2\right) = e^{\alpha t}\left[\vec{a}\,\mathrm{sen}\,\beta t + \vec{b}\cos\beta t\right]$$

Ejemplo 11.3 *Encontrar la solución general del sistema*

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix}-1 & 2\\-1 & -3\end{pmatrix}\vec{x}(t)$$

Solución. Valores y vectores propios de $\mathbf{A}$:

$$\begin{vmatrix}-1-r & 2\\-1 & -3-r\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r^2+4r+4=0 \Rightarrow r=-2\pm i$$

$$r=-2+i \Rightarrow \begin{pmatrix}1-i & 2\\-1 & -1-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow (1-i)\,x+2y=0$$

$$\Rightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix}-1-i\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - i\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$r=-2-i \Rightarrow \begin{pmatrix}1+i & 2\\-1 & -1+i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow (1+i)\,x+2y=0$$

$$\Rightarrow \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}-1+i\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Las soluciones linealmente independientes serán:

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= e^{-2t}\left[\cos t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - \operatorname{sen} t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]\\ \vec{x}_2 &= e^{-2t}\left[\operatorname{sen} t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \cos t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]\end{aligned}$$

La solución general del sistema será:

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{-2t}\left[\cos t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - \operatorname{sen} t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right] + C_2 e^{-2t}\left[\operatorname{sen} t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \cos t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right].$$

11.2.3. Valores propios con multiplicidad mayor que 1

Si un autovalor con multiplicidad m tiene m vectores propios linealmente independientes nos remitimos al primer caso, si tiene menos vectores el estudio a hacer es diferente.

Nos limitaremos a estudiar valores propios con multiplicidad 2, lo que implica que se necesitan dos vectores linealmente independientes.

- El primer vector será aquel que satisface
  $(\mathbf{A}-r_1\mathbf{I})\,\vec{u}_1 = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_1 = e^{r_1 t}\vec{u}_1.$
- El segundo vector será aquel que satisface
  $(\mathbf{A}-r_1\mathbf{I})^2\,\vec{u}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_2 = e^{r_1 t}\,[\mathbf{I}+(\mathbf{A}-r_1\mathbf{I})\,t]\,\vec{u}_2.$

Ejemplo 11.4 *Encontrar la solución general del sistema*

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\vec{x}(t)$$

Solución. Valores y vectores propios de $\mathbf{A}$:

$$\begin{vmatrix}1-r & 0 & 0\\ 1 & 3-r & 0\\ 0 & 1 & 1-r\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r = 1 \text{ (doble)}, 3$$

$$r=3 \Rightarrow \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{array}{c}x=0\\ y-2z=0\end{array} \Rightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$r=1 \Rightarrow \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{array}{c}y=0\\ x+2y=0\end{array} \Rightarrow \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow x+2y=0 \Rightarrow \vec{u}_3 = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

Las soluciones linealmente independientes serán:

$$\vec{x}_1 = e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2 = e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{x}_3 = e^{t}\left[\mathbf{I}+(\mathbf{A}-r_1\mathbf{I})\,t\right]\vec{u}_3 = e^{t}\left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

La solución general del sistema será:

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{t}\left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

11.3. APLICACIONES DE LOS SISTEMAS LINEALES

Las aplicaciones más conocidas provienen de las ecuaciones de segundo orden. En general, una ecuación diferencial de orden n se puede convertir en un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales.

11.3.1. Resolución de ecuaciones diferenciales de orden n

Una ecuación diferencial de orden n

$$y^{(n)}(t) + p_1 y^{(n-1)}(t) + ... + p_n(t)y(t) = g(t)$$

se puede reescribir en términos de un sistema sin más que hacer un cambio de variable:

$$\left.\begin{array}{c} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = y'(t) \\ ... \\ x_n(t) = y^{n-1}(t) \end{array}\right| , \mathbf{A}(t)= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -p_n & -p_{n-1} & -p_{n-2} & ... & -p_1 \end{pmatrix}, \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ g(t) \end{pmatrix}$$

En particular, una ecuación diferencial lineal de segundo orden tiene la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = F(x) \tag{11.1}$$

se puede reescribir en términos de un sistema mediante el cambio $\left\{\begin{array}{c} x_1(x) = y(x) \\ x_2(x) = y'(x) \end{array}\right.$,

$$\begin{pmatrix} x_1'(x) \\ x_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q(x) & -P(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(x) \\ x_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F(x) \end{pmatrix}$$

y utilizar la resolución de los sistemas lineales de orden dos para encontrar las soluciones de las ecuaciones lineales de orden dos.

Ecuaciones de segundo orden

Ejercicio 11.1 *Resuelve las siguientes ecuaciones pasando las ecuaciones a sistemas de orden dos.*

1. $12y'' + 22y' - 20y = 0,$ ***Solución:*** $y(x) = C_1 e^{-\frac{5}{2}x} + C_2 e^{\frac{2}{3}x},$

2. $y'' - 3y' + 2y = 0,$ ***Solución:*** $y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x}$

3. $y'' + 2y' - y = 0,$ ***Solución:*** $y(x) = C_1e^{(\sqrt{2}-1)x} + C_2e^{-(\sqrt{2}+1)x}$

4. $y'' - 2y' + 5y = 0,$ ***Solución:*** $y(x) = C_1e^x \operatorname{sen} 2x + C_2e^x \cos 2x$

5. $5y'' + 6y = 0,$ ***Solución:*** $y(x) = C_1 \cos \frac{1}{5}\sqrt{30}x + C_2 \operatorname{sen} \frac{1}{5}\sqrt{30}x$

6. $y'' - 4y' + 20y = 0,$ ***Solución:*** $y(x) = C_1e^{2x} \operatorname{sen} 4x + C_2e^{2x} \cos 4x$

7. $y'' + 8y = 0.$ ***Solución:*** $y(x) = C_1 \cos 2\sqrt{2}x + C_2 \operatorname{sen} 2\sqrt{2}x$

Ejercicio 11.2 *Para cada una de las siguientes ecuaciones, encontrar una solución particular que satisfaga las condiciones iniciales dadas:*

1. $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$
   Solución: $y(x) = e^{-2x}(1 + 3x)$

2. $y'' - 4y' + 20y = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad y'(\frac{\pi}{2}) = 1.$
   Solución: $y(x) = \frac{1}{4}e^{-\pi+2x} \operatorname{sen} 4x$

3. $5y'' - y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$
   Solución: $y(x) = \dfrac{10e^{x/10} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{19}x}{10}}{\sqrt{19}}$

11.3.2. Problemas de mezclas

Ejemplo 11.5 *Dos tanques, cada uno de ellos con 100 litros de agua, se encuentran interconectados por medio de tubos. El líquido fluye del tanque A al B a razón de 30 l/min y hacia fuera del tanque A a razón de 10 l/min. El líquido fluye del tanque B al A a razón de 20 l/min y hacia fuera del tanque B a razón de 10 l/min, manteniendo el líquido de cada tanque bien agitado. Una solución de salmuera con una concentración de 0.2 Kg/l fluye desde el exterior hacia el tanque A a razón de 20 l/min. Si inicialmente el tanque B sólo contiene agua y el A contiene 4 kg de sal, ¿qué concentración habrá en cada uno de los tanques al cabo de 10 min?.*

Solución. Para resolver este tipo de problemas, el primer paso consiste en definir correctamente las variables. En este problema definimos:

$x(t)$: cantidad de sal que hay en el tanque A en un instante t (en kg).
$y(t)$: cantidad de sal que hay en el tanque B en un instante t (en kg).

Por lo que, al estudiar las variaciones de estas variables por unidad de tiempo, se obtiene el sistema que se ha de resolver:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = 20\,(l/\text{mín})\, 0{,}2\,(kg/l) + 20\ (l/\text{mín})\,\dfrac{y\,(kg)}{500\,(l)} - \\ \qquad\qquad -30\ (l/\text{mín})\,\dfrac{x\,(kg)}{500\,(l)} - 10\,(l/\text{mín})\,\dfrac{x\,(kg)}{500\,(l)} \\ \dfrac{dy}{dt} = 30\ (l/\text{mín})\,\dfrac{x\,(kg)}{500\,(l)} - 20\ (l/\text{mín})\,\dfrac{y\,(kg)}{500\,(l)} - 10\ (l/\text{mín})\,\dfrac{y\,(kg)}{500\,(l)} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = 4 + \dfrac{2y}{50} - \dfrac{4x}{50} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3x}{50} - \dfrac{3y}{50} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{50} & \dfrac{2}{50} \\ \dfrac{3}{50} & -\dfrac{3}{50} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con las condiciones iniciales: $x(0) = 4$ (kg) , $y(0) = 0$ (kg) .

Para resolver el sistema primero se calculan los vectores y valores propios de la matriz:

$\lambda = -\frac{3}{25} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda = -\frac{1}{50} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, por lo que las solución del sistema homogéneo es:

$$\vec{x}_h(t) = C_1 e^{-\frac{3t}{25}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-\frac{t}{50}} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dado que el término independiente es constante, $\vec{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ supondremos lineal la solución particular: $\vec{x}_p(t) = \vec{a} + \vec{b}t$, con $\vec{a}, \vec{b}$ vectores constantes.

$$\frac{d\vec{x}_p(t)}{dt} = \vec{b} = A\vec{x}_p + \vec{f} = A\left(\vec{a} + \vec{b}t\right) + \vec{f} \Rightarrow$$

$$\vec{b} = A\vec{a} + A\vec{b}t + \vec{f} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \vec{b} = \vec{0} \\ \vec{b} = A\vec{a} + \vec{f} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$A\vec{a} = -\vec{f} \Rightarrow \vec{a} = -A^{-1}\vec{f} = -\begin{pmatrix} -25 & -\frac{50}{3} \\ -25 & -\frac{100}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-\frac{3t}{25}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-\frac{t}{50}} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Para que se cumplan las condiciones iniciales se ha de resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

De donde se obtiene: $C_1 = \dfrac{88}{5}$, $C_2 = -\dfrac{588}{5}$. Por tanto:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{88}{5} e^{-\frac{3t}{25}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{588}{5} e^{-\frac{t}{50}} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Al cabo de 10 minutos el tanque A tendrá:

$$x(10) = -\tfrac{392}{5} e^{-\frac{1}{5}} - \tfrac{88}{5} e^{-\frac{6}{5}} + 100 = 30.51 \text{ kg de sal},$$

y el B tendrá:

$$y(10) = -\tfrac{588}{5} e^{-\frac{1}{5}} + \tfrac{88}{5} e^{-\frac{6}{5}} + 100 = 9.0183 \text{ kg de sal}.$$

APÉNDICES

Apéndice A

PRIMITIVAS INMEDIATAS

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \Rightarrow \int u'(x)\,[u(x)]^n\, dx = \frac{[u\,(x)]^{n+1}}{n+1} + C$

2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \Rightarrow \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| + C$

3. $\int e^x dx = e^x + C \Rightarrow \int u'(x) e^{u(x)} dx = e^{u(x)} + C$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \Rightarrow \int u'(x) a^{u(x)} dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a} + C,\ a > 0$

5. $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C \Rightarrow \int u'(x) \cos u(x) dx = \operatorname{sen} u(x) + C$

6. $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C \Rightarrow \int u'(x) \operatorname{sen} u(x) dx = -\cos u(x) + C$

7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \Rightarrow \int \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)} dx = \tan u(x) + C$

8. $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\cot x + C \Rightarrow \int \frac{u'(x)}{\operatorname{sen}^2 u(x)} dx = -\cot u(x) + C$

9. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx = \sec x + C \Rightarrow \int \frac{u'(x) \operatorname{sen} u(x)}{\cos^2 u(x)} dx = \sec u(x) + C$

10. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\csc x + C \Rightarrow \int \frac{u'(x) \cos u(x)}{\operatorname{sen}^2 u(x)} dx = -\csc u(x) + C$

11. $\int \cosh x dx = \operatorname{senh} x + C \Rightarrow \int u'(x) \cosh u(x) dx = \operatorname{senh} u(x) + C$

12. $\int \operatorname{senh} x dx = \cosh x + C \Rightarrow \int u'(x) \operatorname{senh} u(x) dx = \cosh u(x) + C$

13. $\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + C \Rightarrow \int \frac{u'(x)}{\cosh^2 u(x)} dx = \tanh u(x) + C$

14. $\int \frac{1}{\operatorname{senh}^2 x} dx = \coth x + C \Rightarrow \int \frac{u'(x)}{\operatorname{senh}^2 u(x)} dx = \coth u(x) + C$

15. $\int \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh^2 x} dx = -\operatorname{sech} x + C \Rightarrow \int \frac{u'(x) \operatorname{senh} u(x)}{\cosh^2 u(x)} dx = -\operatorname{sech} u(x) + C$

16. $\displaystyle\int \frac{\cosh x}{\operatorname{senh}^2 x}dx = -\operatorname{csch} x + C \Rightarrow \int \frac{u'(x)\cosh u(x)}{\operatorname{senh}^2 u(x)}dx = -\operatorname{csch} u(x) + C$

17. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arcsen} x + C \Rightarrow \int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}dx = \operatorname{arcsen} u(x) + C$

18. $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos x + C \Rightarrow \int \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}dx = \arccos u(x) + C$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C \Rightarrow \int \frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}dx = \arctan u(x) + C$

20. $\displaystyle\int \frac{-1}{1+x^2}dx = \operatorname{arccot} x + C \Rightarrow \int \frac{-u'(x)}{1+[u(x)]^2}dx = \operatorname{arccot} u(x) + C$

21. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \operatorname{arcsec} x + C \Rightarrow \int \frac{u'(x)}{u(x)\sqrt{[u(x)]^2-1}}dx = \operatorname{arcsec} u(x) + C$

22. $\displaystyle\int \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \operatorname{arccsc} x + C \Rightarrow \int \frac{-u'(x)}{u(x)\sqrt{[u(x)]^2-1}}dx = \operatorname{arccsc} u(x) + C$

23. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C = \arg\operatorname{senh} x + C \Rightarrow$
$\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sqrt{[u(x)]^2+1}}dx = \ln\left|u(x) + \sqrt{[u(x)]^2+1}\right| + C = \arg\operatorname{senh} u(x) + C$

24. $\displaystyle\int \frac{\pm 1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \ln\left|x \pm \sqrt{x^2-1}\right| + C = \arg\cosh x + C \Rightarrow$
$\displaystyle\int \frac{\pm u'(x)}{\sqrt{[u(x)]^2-1}}dx = \ln\left|u(x) \pm \sqrt{[u(x)]^2-1}\right| + C = \arg\cosh u(x) + C$

25. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \Rightarrow \int \frac{u'(x)}{1-[u(x)]^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u(x)}{1-u(x)}\right| + C =$
$= \arg\tanh u(x) + C$

26. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx = \ln\left|\frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C = \arg\operatorname{sech} x + C \Rightarrow$
$\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)\sqrt{1-[u(x)]^2}}dx = \ln\left|\frac{1 \pm \sqrt{1-[u(x)]^2}}{u(x)}\right| + C = \arg\operatorname{sech} u(x) + C$

27. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx = \ln\left|\frac{1 \pm \sqrt{1+x^2}}{x}\right| + C = \arg\operatorname{csch} x + C \Rightarrow$
$\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)\sqrt{1+[u(x)]^2}}dx = \ln\left|\frac{1 \pm \sqrt{1+[u(x)]^2}}{u(x)}\right| + C = \arg\operatorname{csch} u(x) + C$

Apéndice B

CÓNICAS

B.1. INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

El matemático griego Menecmo (350 a.c.) descubrió estas curvas. Fue el matemático griego Apolonio (262-190 a.c.) de Perga (antigua ciudad del Asia Menor) el primero en estudiar detalladamente las curvas cónicas y encontrar la propiedad plana que las definía. Apolonio descubrió que las cónicas se podían clasificar en tres tipos a los que dio el nombre de: elipses, hipérbolas y parábolas.

Las elipses son las curvas que se obtiene cortando una superficie cónica con un plano que no es paralelo a ninguna de sus generatrices.

Las hipérbolas son las curvas que se obtiene al cortar una superficie cónica con un plano que es paralelo a dos de sus generatrices (base y arista).

Las parábolas son las curvas que se obtienen al cortar una superficie cónica con un plano paralelo a una sola generatriz (arista).

Apolonio demostró que las curvas cónicas tienen muchas propiedades interesantes. Algunas de esas propiedades son las que se utilizan actualmente para definirlas. Quizás las propiedades más interesantes y útiles que descubrió Apolonio de las cónicas son las llamadas propiedades de reflexión. Si se construyen espejos con la forma de una curva cónica que gira alrededor de su eje, se obtienen los llamados espejos elípticos, parabólicos o hiperbólicos, según la curva que gira.

Apolonio demostró que si se coloca una fuente de luz en el foco de un espejo elíptico, entonces la luz reflejada en el espejo se concentra en el otro foco. Si se recibe luz de una fuente lejana con un espejo parabólico de manera que los rayos incidentes son paralelos al eje del espejo, entonces la luz reflejada por el espejo se concentra en el foco. Esta propiedad permite encender un papel si se coloca en el foco de un espejo parabólico y el eje del espejo se apunta hacia el Sol. Existe la leyenda de que Arquímedes (287-212 a.c.) logró incendiar las naves romanas durante la defensa de Siracusa usando las propiedades de los espejos parabólicos. En la actualidad esta propiedad se utiliza para los radares, las antenas de televisión y espejos solares. Análogamente, la propiedad que nos dice que un rayo que parte del foco se refleja paralelamente al eje. sirve para que los faros de los automóviles concentren el haz en la dirección de la carretera o para estufas. En el caso de los espejos hiperbólicos, la luz proveniente de uno de los focos se refleja como si viniera del otro foco, esta propiedad se utiliza en los grandes estadios para conseguir una superficie mayor iluminada.

En el siglo XVI el filósofo y matemático René Descartes (1596-1650) desarrolló un método para relacionar las curvas con ecuaciones. Este método es la llamada

Geometría Analítica. En la Geometría Analítica las curvas cónicas se pueden representar por ecuaciones de segundo grado en las variables x e y. El resultado más sorprendente de la Geometría Analítica es que todas las ecuaciones de segundo grado en dos variables representan secciones cónicas; este resultado se lo debemos a Jan de Witt (1629-1672). Sin lugar a dudas las cónicas son las curvas más importantes que la geometría ofrece a la física. Por ejemplo, las propiedades de reflexión son de gran utilidad en la óptica. Pero sin duda lo que las hace más importantes en la física es el hecho de que las órbitas de los planetas alrededor del sol sean elipses y que, más aún, la trayectoria de cualquier cuerpo sometido a una fuerza gravitatoria es una curva cónica. El astrónomo alemán Johannes Kepler (1570-1630) descubrió que las órbitas de los planetas alrededor del sol son elipses que tienen al sol como uno de sus focos en el caso de la tierra la excentricidad es 0.017 y los demás planetas varían desde 0.004 de Neptuno a 0.250 de Plutón. Más tarde, el célebre matemático y físico inglés Isaac Newton (1642-1727) demostró que la órbita de un cuerpo alrededor de una fuerza de tipo gravitatorio es siempre una curva cónica.

B.2. CÓNICAS: CARACTERIZACIÓN Y ECUACIONES

Veremos las ecuaciones y aplicaciones de las cónicas, denominadas en muchas ocasiones como secciones cónicas ya que, como se ha dicho, se obtienen al cortar un cono por distintos planos.

Definición 39 *Una* ***parábola*** *es el conjunto de puntos que equidistan de un punto dado F (foco) y una recta dada L (directriz), es decir, un punto P pertenece a la parábola si*

$$d(P,F) = d(P,L)$$

y dependiendo de donde estén situados F y L la ecuación de la parábola será:

$y^2 = 4cx,\ F(c,0),\ L : x = -c;$
$x^2 = 4xy,\ F(0,c),\ L : y = -c;$

El punto medio del foco y la directriz se conoce como *vértice* de la parábola, las parábolas anteriores tenian su vértice en $(0,0)$. $|c| =$ distancia entre el vértice y el foco (o la directriz). Si el vértice está en el punto $V(v_1, v_2)$ pero el eje de la parábola es paralelo a uno de los ejes coordenados, las ecuaciones de la parábola son:

$(y - v_2)^2 = 4c(x - v_1)$
$(x - v_1)^2 = 4x(y - v_2)$.

Observamos que una parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que satisfacen

$$\frac{d(P,F)}{d(P,L)} = 1$$

lo que nos permite introducir la definición general de las cónicas.

Definición 40 *Sean F, L y e un punto, una linea que no contiene a P y número real positivo, respectivamente. La cónica con* foco F, directriz L *y* excentricidad e *es el conjunto de puntos P tales que*

$$\frac{d(P,F)}{d(P,L)} = e \tag{B.1}$$

Se llama *elipse* si $e < 1$, *parábola* si $e = 1$ e *hipérbola* si $e > 1$. La linea que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz es el *eje* de la cónica. Los puntos de la cónica que están sobre el eje se conocen como *vértices.*

La parábola tiene un sólo vértice pero la elipse y la hipérbola tienen dos, el punto medio entre ambos se conoce como *centro* de la cónica.

Si consideramos que el centro de las cónicas es $(0,0)$, los vértices están situados en $(-a,0)$ y $(a,0)$, el foco está en $F(c,0)$ y la directriz es la recta $x = d$ $(d > 0)$ la ecuación anterior aplicada a los vértices permite obtener las ecuaciones

$$\begin{aligned} a - c &= e\,(d - a) \\ a + c &= e\,(d + a) \end{aligned}$$

de donde se deduce, sumando y restando, respectivamente, que

$$\begin{aligned} \frac{a}{e} &= d, \text{ distancia del centro a la directriz,} \\ \frac{c}{a} &= e, \text{ excentricidad.} \end{aligned}$$

Escribiendo las ecuación (B.1) en términos de las coordenadas de los puntos se obtienen las ecuaciones ya conocidas. Por ejemplo, la ecuación de una elipse centrada en (c_1, c_2) y eje paralelo a los ejes coordenados se puede escribir como

$$\frac{(x-c_1)^2}{a^2} + \frac{(y-c_2)^2}{b^2} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{(y-c_2)^2}{a^2} + \frac{(x-c_1)^2}{b^2} = 1$$

dependiendo si el eje es horizontal o vertical. Igualmente, una hipérbola centrada en (c_1, c_2) y eje paralelo a los ejes coordenados se puede escribir como

$$\frac{(x-c_1)^2}{a^2} - \frac{(y-c_2)^2}{b^2} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{(y-c_2)^2}{a^2} - \frac{(x-c_1)^2}{b^2} = 1$$

dependiendo si el eje es horizontal o vertical.

Ejercicio B.1 *Estudiar y dibujar la elipse:*

$$4x^2 + 9y^2 - 8x - 32 = 0$$

Ejercicio B.2 *Encontrar la ecuación de la elipse con vértices* $(-1,0)$ *y* $(-1,4)$ *y excentricidad* $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ejercicio B.3 *Estudiar y dibujar la hipérbola:*

$$16x^2 - 9y^2 - 32x - -54y - 209 = 0$$

Ejercicio B.4 *Estudiar la gráfica de la hipérbola*

$$r = \frac{3}{1 + 2\cos\theta}$$

En resumen, las curvas de segundo grado definidas por ecuaciones de la forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

corresponden a cónicas. Si los ejes de éstas son paralelos a los ejes coordenados, su ecuación corresponde a $B = 0$,

$$ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

con a, c no nulos simultaneamente. Dependiendo de los valores de A y C se obtiene:

- una elipse si $ac > 0$, si $a = c$ se obtiene una circunferencia.
- una parábola si $ac = 0$,
- una hipérbola si $ac < 0$.

B.2.1. Clasificación general de la cónicas

En el plano euclídeo se llama cónica al lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas respecto de un sistema de referencia cartesiano, verifian una ecuación del tipo:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + c = 0$$

Por lo que, recurriendo a la notación matricial, se puede reescribir la ecuación anterior como

$$X^T M X = 0$$

donde

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad M = \left(\begin{array}{c|c} c & B^T \\ \hline B & A \end{array}\right), \quad B = (b_i), \quad A = (a_{ij})$$

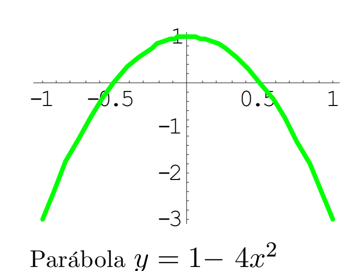
La matriz M se conoce como *matriz de la cónica*, la matriz A se llama *matriz de los términos cuadráticos*. Dos cónicas son iguales si y sólo si sus matrices (en el mismo sistema de referencia) son proporcionales.

Se dice que la cónica es *ordinaria* si su matriz es regular, si la matriz es singular se dice que es *degenerada*. La tabla siguiente nos da la clasificación general de las cónicas:

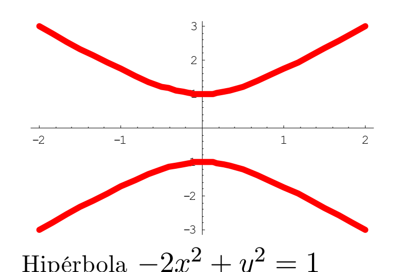
		Tipo de cónica
	$I_2 > 0$	$I_1I_3 < 0$ elipse real
	$I_2 > 0$	$I_1I_3 > 0$ elipse imaginaria
$I_3 \neq 0$	$I_2 < 0$	hipérbola
	$I_2 = 0$	parábola
	$I_2 > 0$	un punto
$I_3 = 0$	$I_2 < 0$	dos rectas secantes
	$I_2 = 0$	dos rectas paralelas

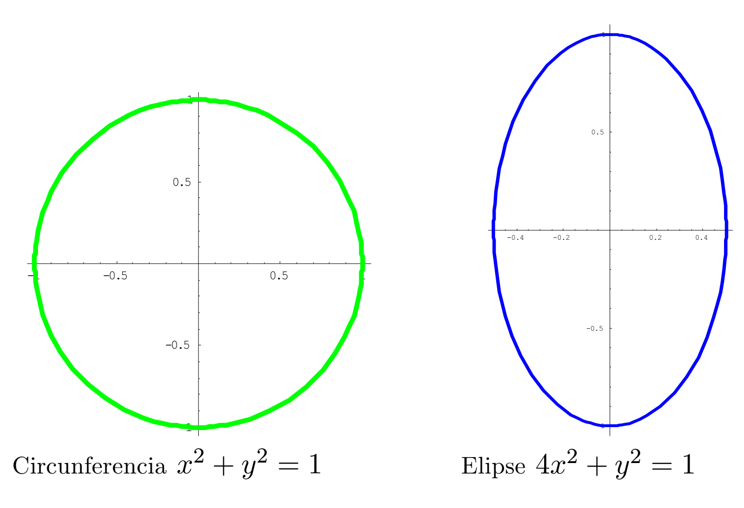
donde $I_3 = \det M$, $I_2 = \det A$, $I_1 = trA = a_{11} + a_{12}$.

En el dibujo siguiente se pueden ver los distintos tipos de cónicas:



Parábola $y = 1- 4x^2$


Hipérbola $-2x^2 + y^2 = 1$



Circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ Elipse $4x^2 + y^2 = 1$

En el plano euclídeo siempre existe un sistema de referencia respecto del cual las ecuaciones de las cónicas se pueden escribir de *forma reducida*, es aquel sistema donde el eje de simetría de las cónicas coinciden con los ejes de coordenadas, en este sistema las ecuaciones de las cónicas se escriben:

	Ecuación reducida	Tipos de cónicas
$\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \dfrac{\det M}{\det A} = 0$	Elipses e hipérbolas (referidas a sus ejes) y pares de rectas concurrentes (referidas a sus bisectrices).
$\begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 \neq 0 \end{matrix}$, $\det M \neq 0$	$y^2 = 2px, \quad p = \sqrt{\dfrac{-\det M}{\lambda_2^3}}$	Parábolas referidas a su eje (eje x) y a su tangente en el vértice (eje y).
$\begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 \neq 0 \end{matrix}$, $\det M = 0$	$y^2 = k$	Pares de rectas paralelas.

Veámos como obtener esta ecuación reducida a partir de la ecuación general.

B.3. APLICACIONES AFINES Y MOVIMIENTOS RÍGIDOS

Sean A y A' dos espacios afines sobre los espacios vectoriales V y V'. Una aplicación

$$f : A \to A'$$

se dice que es *afín* si existe un punto O de A de forma que la correspondencia

$$f\left(\overrightarrow{OX}\right) = \overrightarrow{f(O)\, f(X)}$$

es una aplicación lineal.

Proposición 1 *Si f es una aplicación afín, para todo par de puntos de A se verifica*

$$f\left(\overrightarrow{PQ}\right) = \overrightarrow{f(P)\, f(Q)}$$

Dados dos espacios afines a y A' de dimensión finita, con sistemas de referencia $R = \{O, B\}$ y $R' = \{O', B'\}$, una aplicación afin está completamente determianda conociendo la imagen del origen $f(O)$ y la aplicación lineal asociada f; es decir:

$$f(X) = f(O) + f\left(\overrightarrow{OX}\right)$$

Si se conocen las coordenadas de $f(O) = (a_{01}, ..., a_{0m})$ y la matriz asociada a f en las bases B, B' $(a_{ij})_{m\times n}$ y se denotan por $(x_1, ..., x_n)$ las coordenadas de un punto $X \in A$ en el sistema de referencia R y por $(y_1, ..., y_m)$ las de $f(X)$ en el sistema de referencia R', se tiene

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ ... \\ a_{0m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

la expresión matricial de una aplicación afín, que también se escribe

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ a_{01} & a_{11} & & a_{1n} \\ & & & \\ a_{0m} & a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

Los *movimientos rígidos* son aquellos que conservan las distancias entre los puntos.

Proposición 2 *Una aplicación afín es un movimiento rígido si y sólo si f es una isometría (conserva la norma de los vectores).*

Proposición 3 *En un espacio afín euclídeo de dimensión finita todo movimiento rígido se puede describir como la composición de un movimiento que deja fijo el origen y una traslación.*

Nosotros consideraremos sólo los giros (que dejan fijo el origen) y las traslaciones.

B.3.1. Obtención de la ecuación reducida de una cónica

La ecuación general de la cónica

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$$

se puede escribir de forma matricial como

$$X^tAX + BX + a_{00} = 0, \; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2a_{01} & 2a_{02} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Se dice que ésta es una ecuación reducida si:

- A es diagonal.
- Si 0 no es un valor propio de A entonces $B = 0$, o bien
  Si 0 es un valor propio de A, entonces $a_{01} = 0$ ò $a_{02} = 0$.

Veamos cómo obtener la ecuación de una cónica a partir de la ecuación general:

- A diagonal:
  Como A es simétrica entonces es diagonalizable por semejanza, es decir, existen D diagonal y P ortogonal (que se puede elegir de forma que $\det P = 1$) tales que $P^tAP = D$, entonces, la expresión

  $$X = PX', \qquad X' = P^tX$$

  representa una rotación en el plano afin euclídeo que deja fijo el origen. Sustituyendo en la ecuación de la cónica

  $$X'^tDX' + BPX' + a_{00} = 0$$

- Eliminación de los términos lineales:

  Para ello utilizaremos el método de completar cuadrados: $a^2+2ab = (a+b)^2 - b^2$. Por lo que mediante la sustitución

$$\begin{aligned} x' &= x + b_1 \\ y' &= y + b_2 \end{aligned}$$

  quedan eliminados los términos de grado uno. Además, como la matriz de cambio de base es la identidad, esto puede interpretarse como una traslación.

En el caso de que uno de los valores propios de a fuese el 0 entonces se utiliza la completación del cuadrado sólo con una de las variables. Después se puede modificar la otra variable para obtener un término independiente nulo.

Podemos pasar así de una ecuación cualquiera a la ecuación reducida mediante la composición de dos movimientos rígidos: una rotación y una traslación. También es un cambio entre sistemas de referencia rectangulares y por tanto las propiedades geométricas de la cónica no varían, sólo su ecuación. Si la rotación tiene de ecuación $X = PX'$ con P una matriz de paso ortogonal y la traslación viene dada por $X'' = C + IX'$, entonces el movimiento rígido que resulta al componerlas es

$$X'' = C + P^t X, \qquad \det P = 1$$

Ejercicio B.5 *Encontrar la ecuación reducida de la cónica:*

$$x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 9 = 0.$$

Ejercicio B.6 *Encontrar la ecuación reducida de la cónica:*

$$9x^2 + 12xy + 4y^2 - 52 = 0.$$

B.3.2. Cálculo de los elementos geométricos de una cónica

Una vez obtenida la ecuación reducida de la cónica en el sistema de referencia R', el origen de este sistema coincida con el centro de la cónica (elipse o hipérbola) o el vértice (parábola) y los ejes coinciden con los ejes de la cónica (élipse o hipérbola) o con el eje y la tangente en el vértice (parábola). Puesto que las coordenadas de O' respecto de R' son $(0,0)$, el centro (o vértice) tendra por coordenadas la solución de la ecuación

$$0 = C + P^t X$$

Para calcular los ejes recordamos que la nueva base está formada por los vectores propios de la matriz A y por tanto estos vectores son los vectores directores de los ejes de la cónica. En el caso de la parábola, el vector propio asociado a $\lambda = 0$ nos da la dirección del eje y el otro vector propio porporciona la dirección de la tangente en el vértice. De forma análoga se pueden obtener los focos, asíntotas, etc.

Ejercicio B.7 *Encontrar la ecuación reducida de la cónica:*

$$-2xy - 2x + 6y + 5 = 0.$$

determinando los focos, centro, asíntotas, etc.

B.3.3. Invariantes y ecuación reducida

Los valores de I_1, I_2 e I_3 son invariantes para los movimientos rígidos, por lo que han de coincidir en la ecuación de partida y en la ecuación reducida. Por ejemplo, si $I_2 \neq 0$, la cónica tendra una ecuación del tipo

$$ax^2 + by^2 + c = 0$$

cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene que $I_3 = abc$, $I_2 = ab$ e $I_1 = a + b$ y por tanto $c = \dfrac{I_3}{I_2}$, mientras que a y b se pueden obtener de la ecuación característica $\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$.

Para la parábola, la ecuación reducida de la forma $y^2 = 2px$ permite obtener el coeficiente $p = \sqrt{-\dfrac{I_3}{I_1^3}}$.

BIBLIOGRAFÍA

[1] J. C. Arya, R. W. Lardner. *Matemáticas aplicadas*. Pearson Educación (2002).

Álgebra lineal

[2] S. I. Grossman. *Álgebra lineal*, 5a. Ed. McGraw-Hill (1993)

[3] S. Lang. *Introducción al álgebra lineal*. Addison-Wesley Iberoamericana (1990)

Cálculo diferencial e integral

[4] G. L. Bradley, K. J. Smith. *Cálculo de una y varias variables*. Prentice-Hall (1998)

[5] R. I. Larson, R. P. Hostetler, B. H. Edwards. *Cálculo y geometría analítica*. McGraw-Hill (1989)

[6] S. L. Sales, I. Hille. *Calculus*, 3^a Edición. Ed. Reverté (1994)

[7] D. G. Zill. *Cálculo con geometría analítica*. Grupo Editorial Iberoamerica (1987)

Ecuaciones diferenciales

[8] M. Braun. *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamèrica (1990)

[9] R. K. Nagle, I. B. Saff. *Fundamentos de ecuaciones diferenciales*, 2^a Edición. Addison-Wesley Iberoamericana (1992)

[10] F. Simmons. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. McGraw-Hill (1990)

[11] D. G. Zill. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*, 2^a Edición. Grupo Editorial Iberoamèrica (1988).